



# 150 Jahre Maxwell-Gleichungen

Wie können Gleichungen die Welt verändern?

Pascal Leuchtman

# Maxwell-Gleichungen



James Clerk Maxwell (1831-1879)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- Zahlen, Vektoren, Operatoren
- Funk und andere Anwendungen
- Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie
- Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik
- Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität
- Die Lösung der Maxwell-Gleichungen

# Gleichungen



1.95 Fr = 1l Cola = 27 Würfelzucker = 17 Rappen

$$1.95 = P_{\text{Cola}} \quad Z_{\text{Cola}} = 27$$

$$P_{\text{Zucker}} = 0.17$$

# Größen bei Maxwell

Elektrisches Moment  $F \quad G \quad H$

Magnetische Intensität  $\alpha \quad \beta \quad \gamma$

Elektromagnetische Kraft  $P \quad Q \quad R$

Leitungsstrom  $p \quad q \quad r$

Elektrische Verschiebung  $f \quad g \quad h$

Gesamter Strom  $p' \quad q' \quad r'$

Freie Elektrizität  $e$

Elektrisches Potential  $\Psi$

20 variable Größen

18 davon zu 3er Gruppen

# Gleichungen des gesamten Stroms

Elektrisches Moment  $F \quad G \quad H$

Magnetische Intensität  $\alpha \quad \beta \quad \gamma$

Elektromagnetische Kraft  $P \quad Q \quad R$

Leitungsstrom

$p \quad q \quad r$

Elektrische Verschiebung

$f \quad g \quad h$

Gesamter Strom

$p' \quad q' \quad r'$

Freie Elektrizität

$e$

Elektrisches Potential

$\Psi$

$$p' = p + \frac{df}{dt}$$

$$q' = q + \frac{dg}{dt}$$

$$r' = r + \frac{dh}{dt}$$

# Gleichungen des elektrischen Stroms

Elektrisches Moment  $F \quad G \quad H$

Magnetische Intensität

$\alpha \quad \beta \quad \gamma$



Elektromagnetische Kraft  $P \quad Q \quad R$

Leitungsstrom  $p \quad q \quad r$

Elektrische Verschiebung  $f \quad g \quad h$

Gesamter Strom  $p' \quad q' \quad r'$



Freie Elektrizität  $e$

Elektrisches Potential  $\Psi$

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p'$$

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q'$$

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r'$$

# Gleichungen der elektromagnetischen Kraft

Elektrisches Moment

$F$   $G$   $H$

Magnetische Intensität

$\alpha$   $\beta$   $\gamma$

Elektromagnetische Kraft

$P$   $Q$   $R$

Leitungsstrom

$p$   $q$   $r$

Elektrische Verschiebung

$f$   $g$   $h$

Gesamter Strom

$p'$   $q'$   $r'$

Freie Elektrizität

$e$

Elektrisches Potential

$\Psi$

$$P = \mu \left( \gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}$$

$$Q = \mu \left( \alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}$$

$$R = \mu \left( \beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}$$

# Kontinuitäts-Gleichung

Elektrisches Moment  $F \quad G \quad H$

Magnetische Intensität  $\alpha \quad \beta \quad \gamma$

Elektromagnetische Kraft  $P \quad Q \quad R$

Leitungsstrom

$p \quad q \quad r$



Elektrische Verschiebung  $f \quad g \quad h$

Gesamter Strom  $p' \quad q' \quad r'$

Freie Elektrizität

$e$



Elektrisches Potential  $\Psi$

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$$



# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- **Zahlen, Vektoren, Operatoren**
- Funk und andere Anwendungen
- Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie
- Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik
- Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität
- Die Lösung der Maxwell-Gleichungen

# Entwicklung zur modernen Schreibweise

$$F \ G \ H \quad \Rightarrow \quad \vec{A}$$

$$\alpha \ \beta \ \gamma \quad \Rightarrow \quad \vec{H}$$

$$P \ Q \ R \quad \Rightarrow \quad \vec{E}$$

$$p \ q \ r \quad \Rightarrow \quad \vec{J}$$

$$f \ g \ h \quad \Rightarrow \quad \vec{D}$$

$$p' \ q' \ r'$$

$$e \quad \Rightarrow \quad \varrho$$

$$\Psi \quad \Rightarrow \quad \varphi$$

## Vektoren und Operatoren



Hermann Grassmann  
(1809-1877)  
«Ausdehnungslehre» 1862



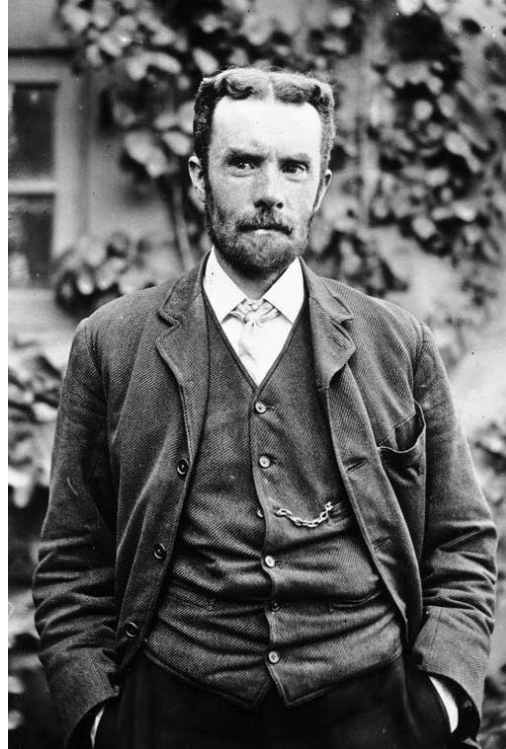
William R. Hamilton  
(1805-1865)

# Maxwell-Gleichungen nach Oliver Heaviside

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p'$$

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q'$$

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r'$$



$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

Oliver Heaviside (1850-1925)

«On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field»

# Maxwell-Gleichungen (ohne Quellen)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = +\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

elektrische  
Größen

$\vec{E}$   $\vec{D}$

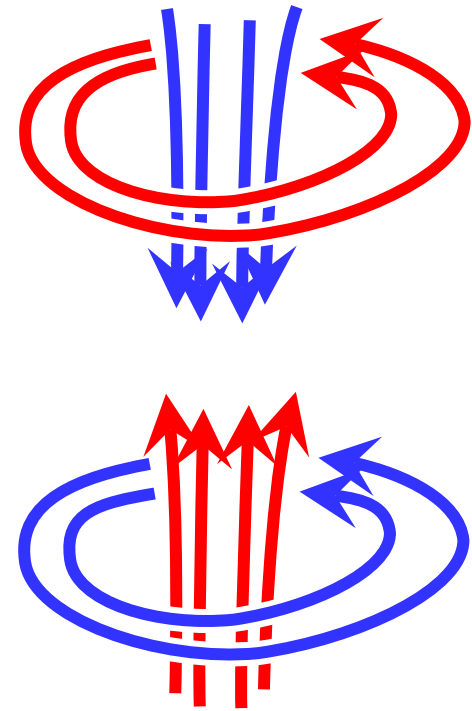
magnetische  
Größen

$\vec{B}$   $\vec{H}$

# Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

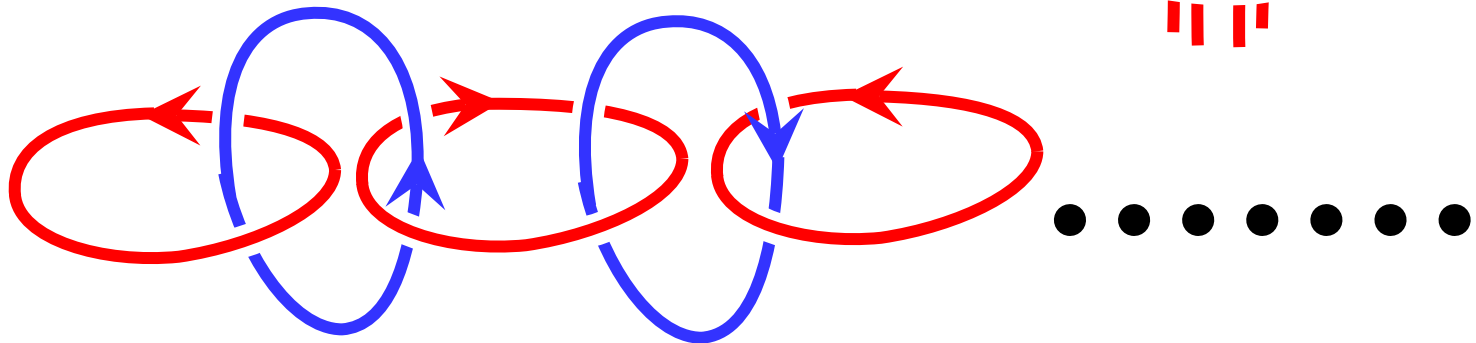
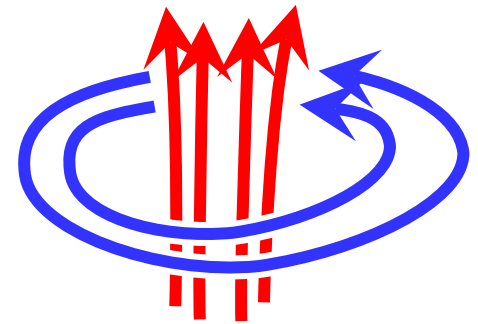
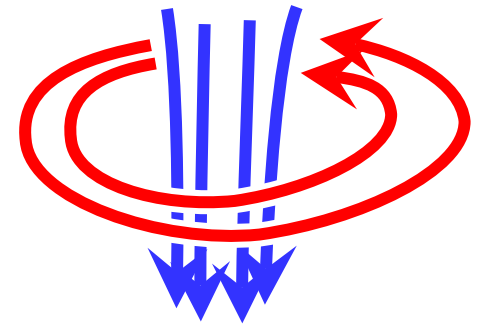


räumliche  
Änderung = zeitliche  
Änderung

# Maxwell-Gleichungen, Wellen

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

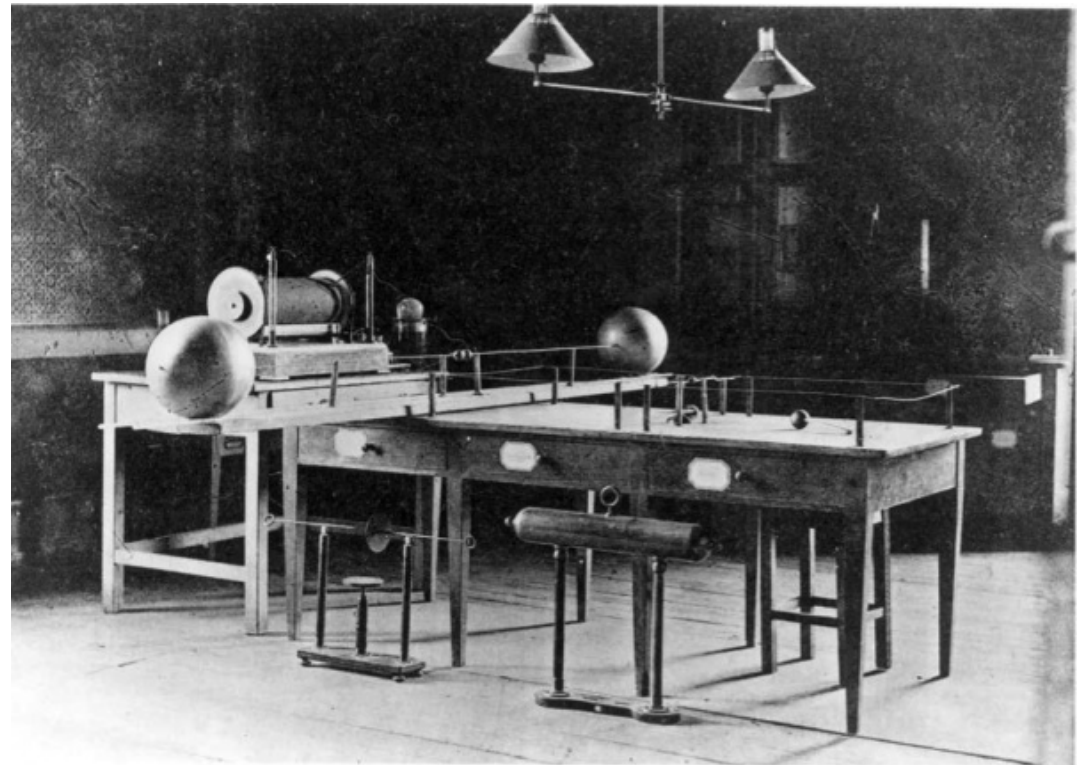


# Experimenteller Nachweis von EM-Wellen



Heinrich Hertz 1857-1894

«Es hat keine praktische Bedeutung.  
Es ist nur ein Experiment, das  
beweist, dass Maxwell recht hatte.»

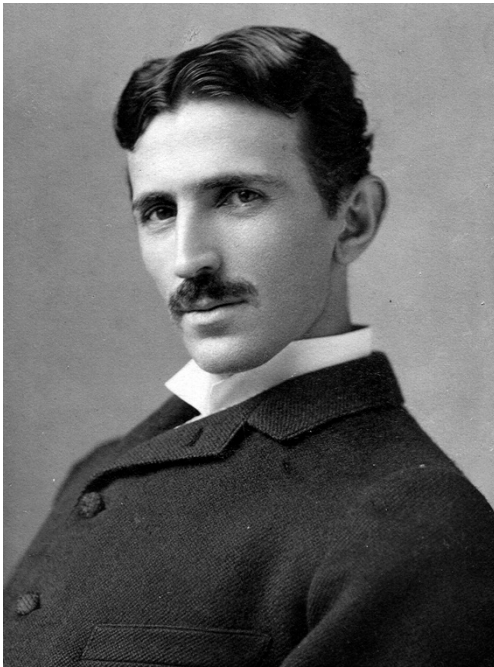


**11. Nov. 1886**

# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- Zahlen, Vektoren, Operatoren
- **Funk und andere Anwendungen**
- Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie
- Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik
- Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität
- Die Lösung der Maxwell-Gleichungen

# Funktechnik (um 1896)



Nikola Tesla  
1856-1943

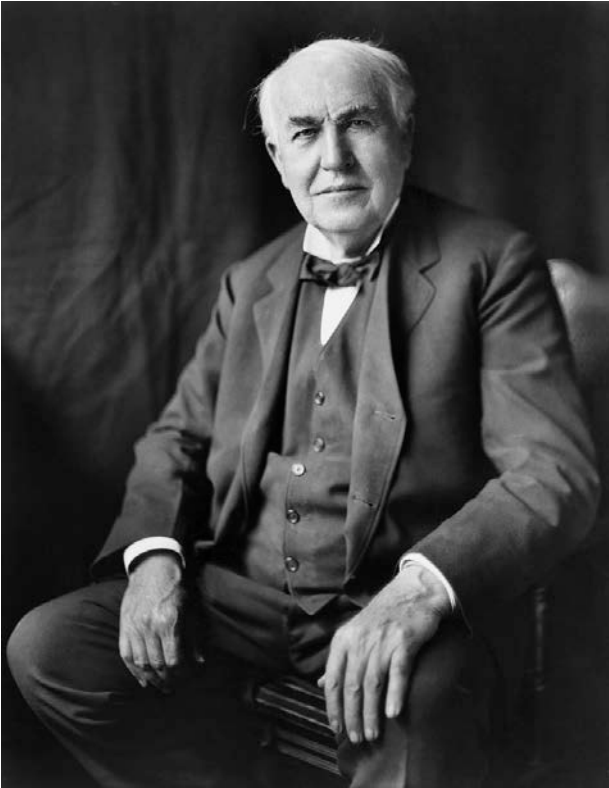


Alexander Popov  
1859-1906



Guglielmo Marconi  
1874-1937

# Elektrotechnische Erfindungen



Thomas Alva Edison  
1847-1931

Telegrafentechnik (1868-1876)

Phonograf (1877)

Glühlampe (1879)

Stromerzeugung/-verteilung  
Edisonzähler (1880)

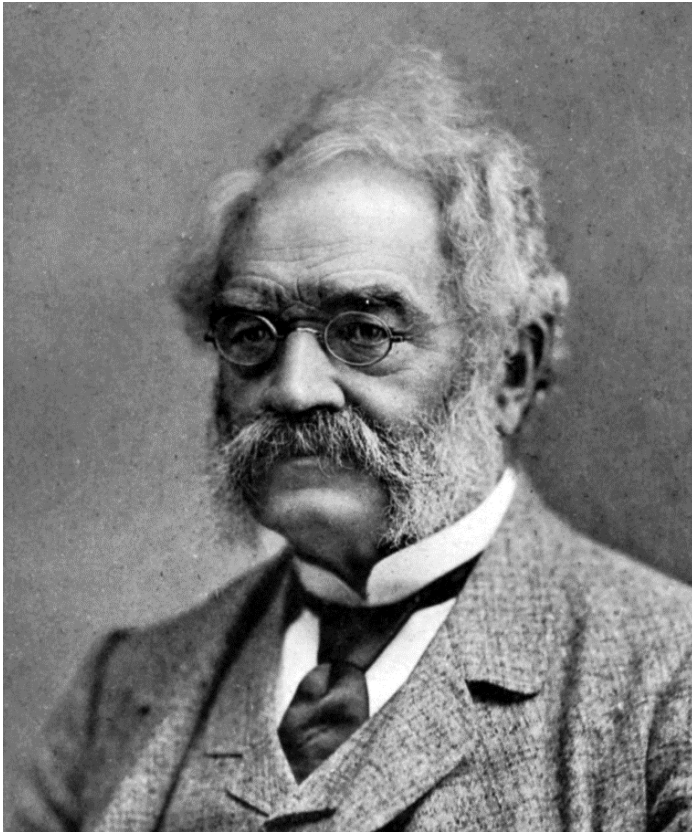
Diktiergerät (1890)

Kinetograf/Kinetoskop (1893)

Elektrischer Stuhl (1893)

Batterieentwicklung (1904)

# Elektrotechnische Erfindungen



Werner von Siemens 1816-1892

Elektrischer Generator (1866)

Galvanik (1842)

Gegenstromprinzip (1857)

Dynamoelektrisches Prinzip (1867)

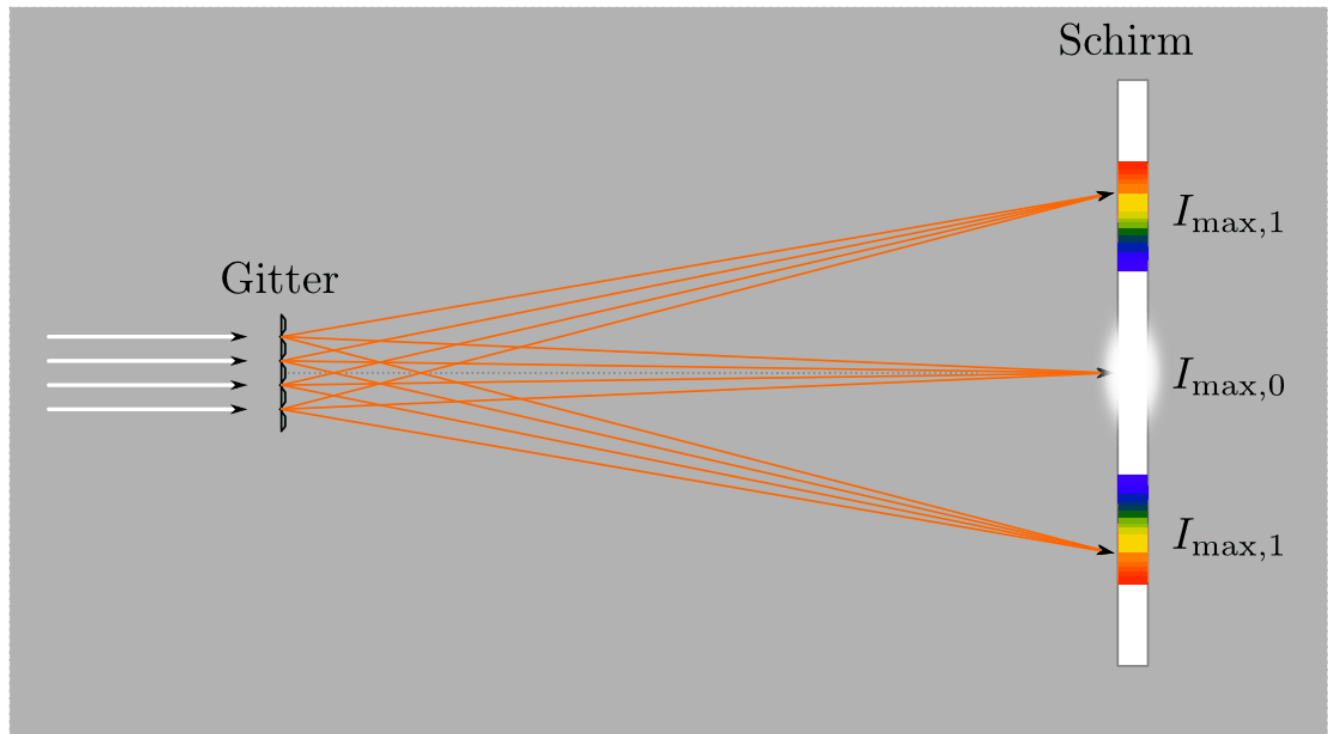
# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- Zahlen, Vektoren, Operatoren
- Funk und andere Anwendungen
- **Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie**
- Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik
- Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität
- Die Lösung der Maxwell-Gleichungen

# Maxwell-Gleichungen...

... Theorie des Lichts!

Wellennatur, Interferenz, Polarisation...  
... und die Lichtgeschwindigkeit.



# Maxwell-Gleichungen...

... Theorie des Lichts!

Wellennatur, Interferenz, Polarisation...

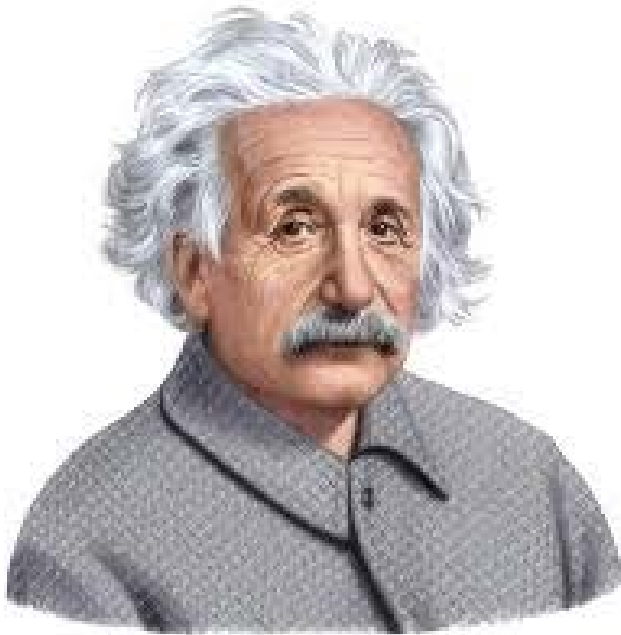
... und die **Lichtgeschwindigkeit**

Mit statischen Experimenten gemessene Konstanten  $\mu_0, \epsilon_0$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 300'000 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

# Maxwell-Gleichungen...

## ... und Relativitätstheorie



Albert Einstein 1879 - 1955

«Was passiert, wenn man einem Lichtstrahl hinterher rennt?»

Einstein fand die Relativitätstheorie, weil er an die Maxwell-Gleichungen glaubte.

Die Maxwell-Gleichungen gehorchen der Relativitätstheorie.

# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- Zahlen, Vektoren, Operatoren
- Funk und andere Anwendungen
- Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie
- **Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik**
- Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität
- Die Lösung der Maxwell-Gleichungen

# Maxwell-Gleichungen...

... sind einfach perfekt???

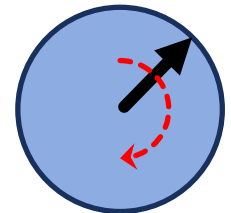
## Quantenelektrodynamik (QED), 1946

Licht: sehr viele Photonen

Photonen bewegen sich

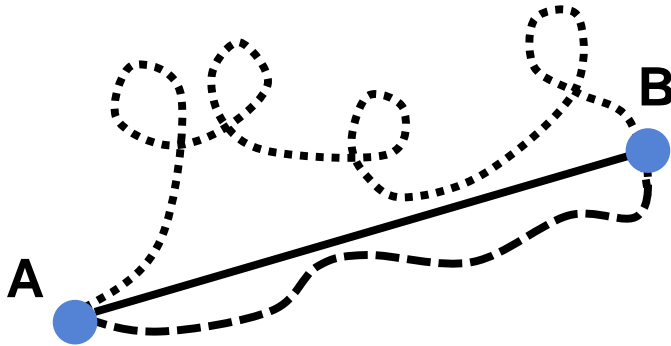
- **immer** mit Lichtgeschwindigkeit
- virtuell auf beliebig krummen Wegen

Jedes Photon hat eine Uhr mit konstant drehendem Zeiger



Richard P. Feynman  
1918 - 1988

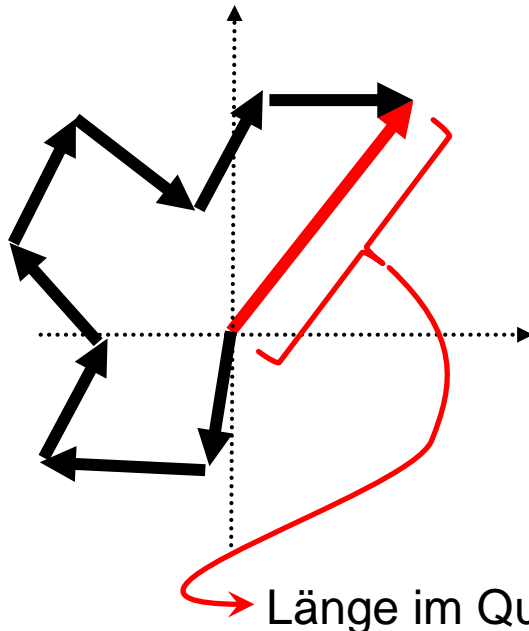
# Quantenelektrodynamik (QED)



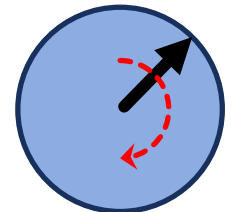
Licht: sehr viele Photonen

Photonen bewegen sich

- **immer** mit Lichtgeschwindigkeit
- virtuell auf beliebig krummen Wegen



Redes Photon stellt eine **Unzahl** mit  
möglichem Wege von A nach B  
konstant drehendem Zeiger  
(unendlich viele!!)



Länge im Quadrat  $\Rightarrow$  **Wahrscheinlichkeit** für 1 Photon **A** $\rightarrow$ **B**

# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- Zahlen, Vektoren, Operatoren
- Funk und andere Anwendungen
- Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie
- Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik
- **Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität**
- Die Lösung der Maxwell-Gleichungen

# Schönheit vs. Anwendung einer Theorie

QED: **Wahrscheinlichkeit**, ob Photon von A nach B gelangt

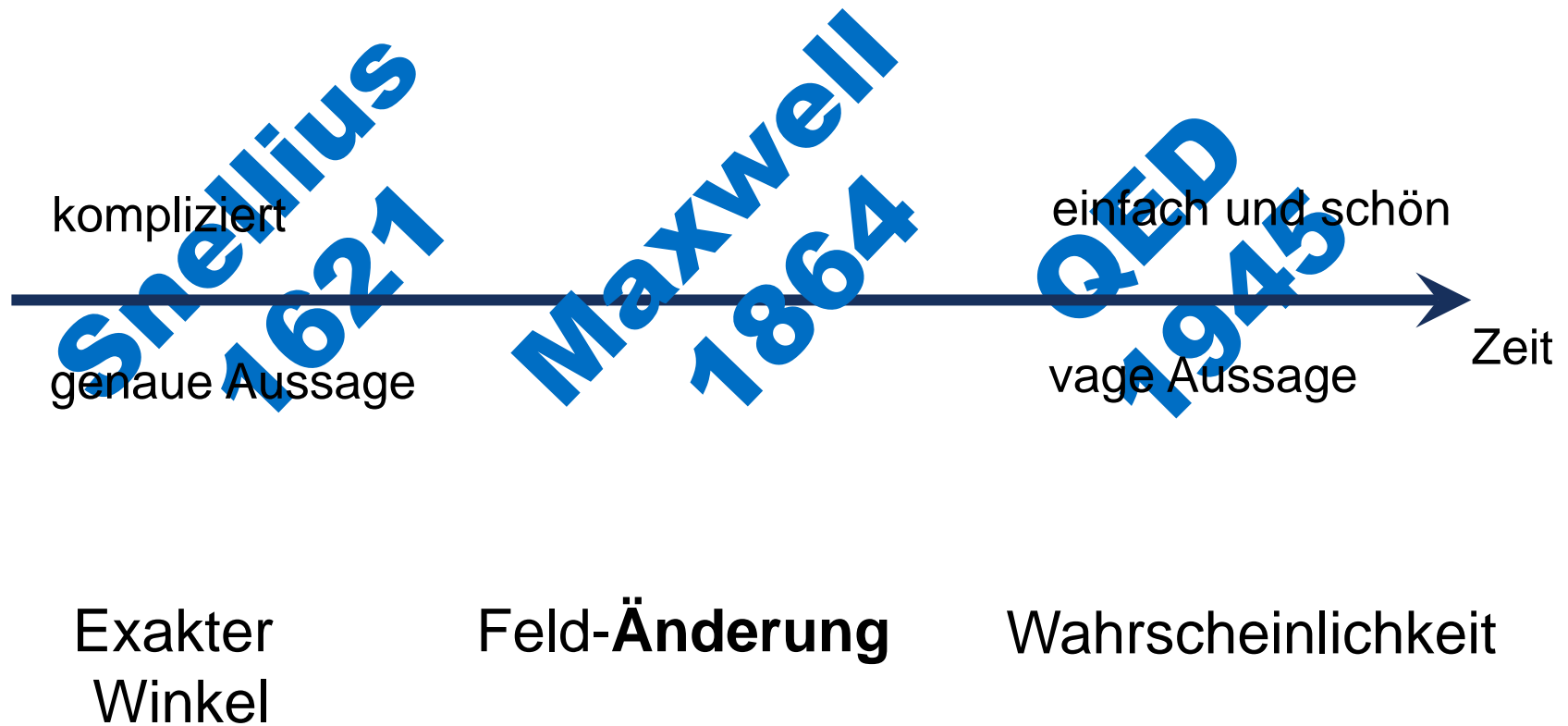
Handy beim Telefonieren:  $2 \cdot 10^{26}$  Photonen pro Minute  
(Empfang: mindestens  $5 \cdot 10^{11}$ )

Staubsauger:  $3 \cdot 10^{36}$  Photonen pro Minute

Früher kompliziertere Theorien mit genaueren Aussagen!



# Postulat der Senilität (nach Res Jost)



# Übersicht

- Physikalische Grössen und Gleichungen
- Zahlen, Vektoren, Operatoren
- Funk und andere Anwendungen
- Theorie des Lichts  $\Rightarrow$  Relativitätstheorie
- Licht nach Maxwell: Quantenelektrodynamik
- Schönheit vs. Anwendung: das Postulat der Senilität
- **Die Lösung der Maxwell-Gleichungen**

# Maxwell-Gleichungen: Lösungen

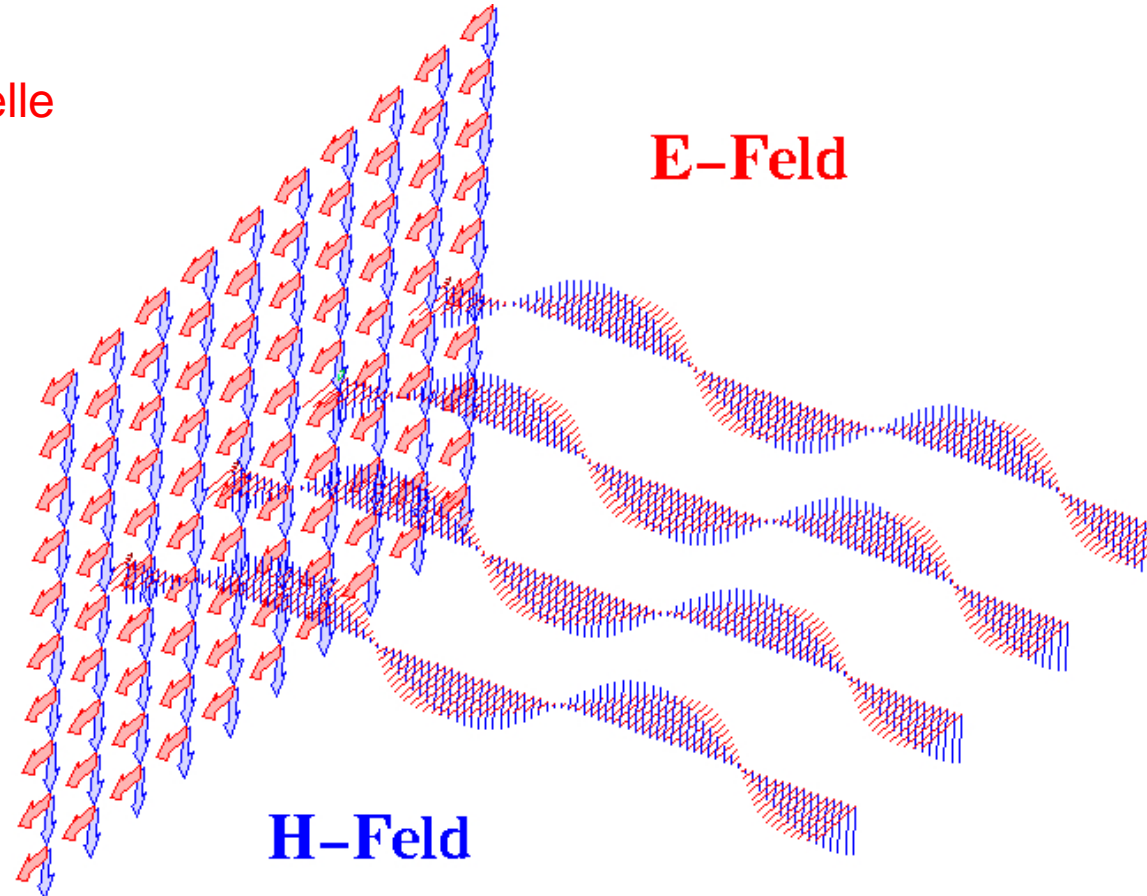
1864: Maxwell: Ebene Welle

$$k\nabla^2\mu\alpha = 4\pi\mu\frac{d^2}{dt^2}\mu\alpha$$

$$lx + my + nz - Vt = w$$

$$k\mu\frac{d^2\alpha}{dw^2} = 4\pi\mu^2V^2\frac{d^2\alpha}{dw^2}$$

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}}$$



# Maxwell-Gleichungen: Lösungen

**1864:** Maxwell: Ebene Welle

**1886:** Experimenteller Nachweis durch Heinrich Hertz

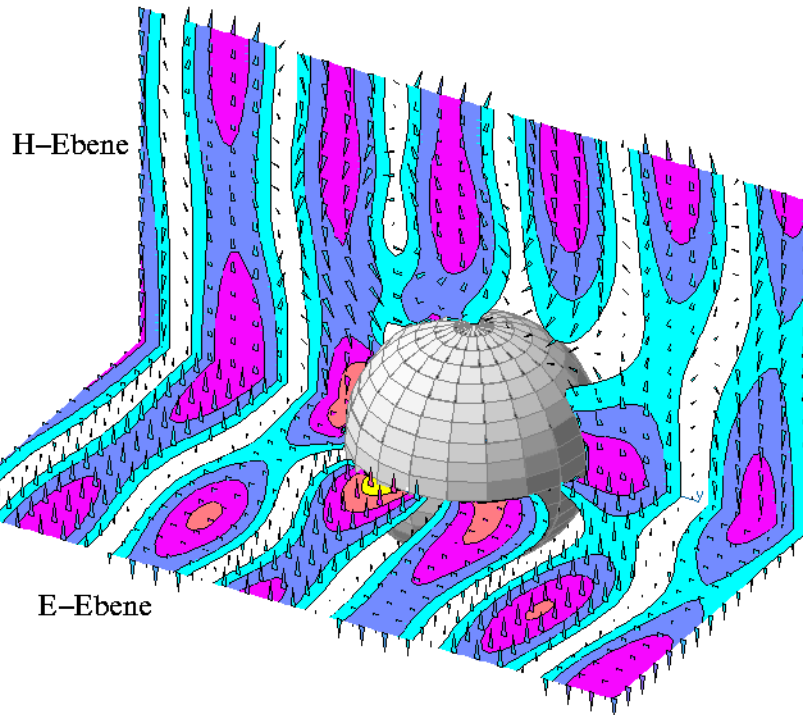
**1899:** Arnold Sommerfeld: *Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes*, Annalen der Physik, vol. 303, Issue 2, pp 233-290. Kreisrunder, unendlich langer Draht

**1908:** Gustav Mie: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*. Annalen der Physik, vol. 330, Issue 3, pp 377-445. Kugel im homogenen Raum

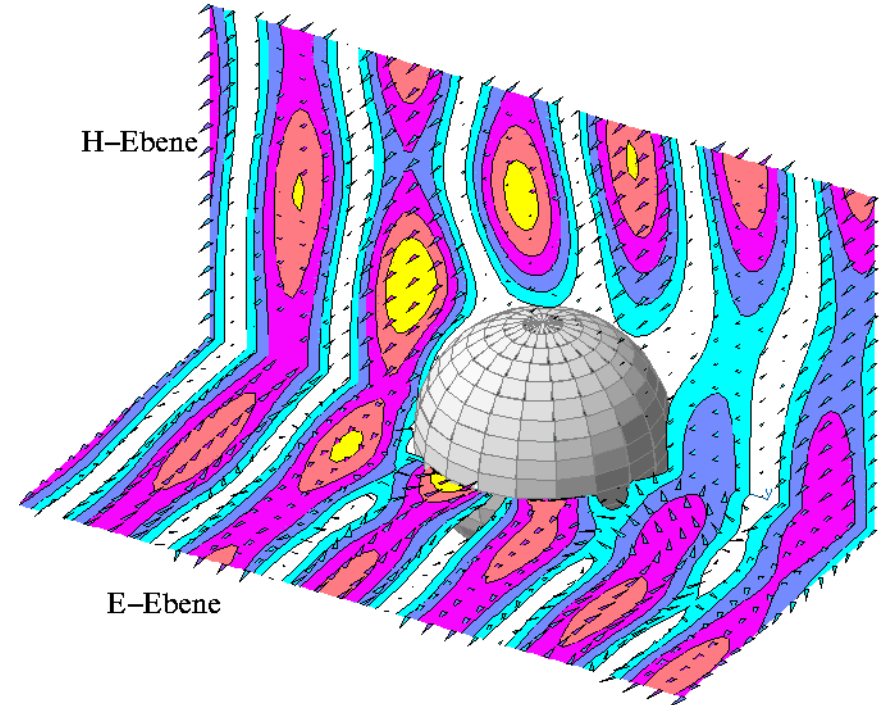
# Maxwell-Gleichungen: Lösungen

1908: Gustav Mie: Kugel im homogenen Raum

## Magnetfeld



## Elektrisches Feld



# Maxwell-Gleichungen: Lösungen

Letzter Satz in Mies Aufsatz:

*„Für die Vollständigkeit der Theorie ist es unbedingt erforderlich, auch noch das Verhalten ellipsoidischer Teilchen zu untersuchen.“*

«Nur» **analytische** Lösungen!

70 Jahre lang galt:

**Theoretische Elektrotechnik**

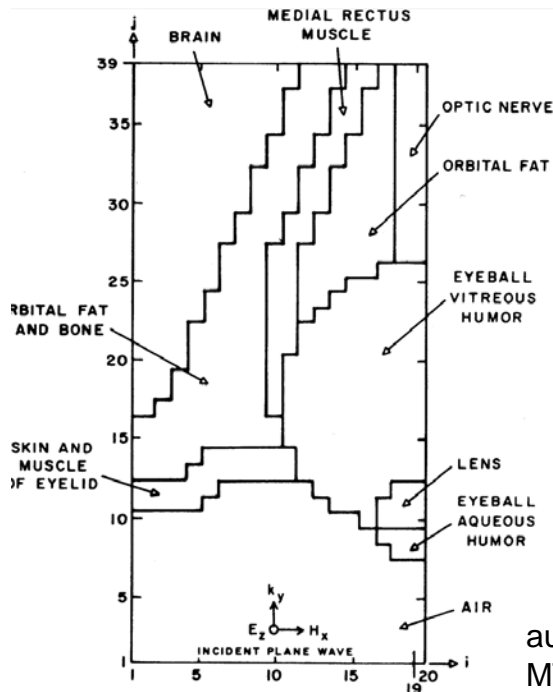
=

**Unverständliche Mathematik**

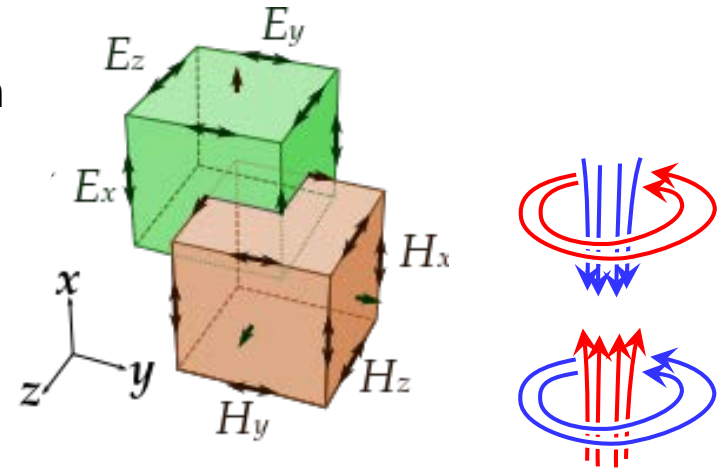
# Maxwell-Gleichungen: numerische Lösungen

1966: Yee-Schema für numerische Lösungen

1975: Erste praktische Anwendungen  
( $20 \times 20 \times 40 = 16'000$  Zellen)



aus: Taflove & Brodwin,  
MTT-23, 1975



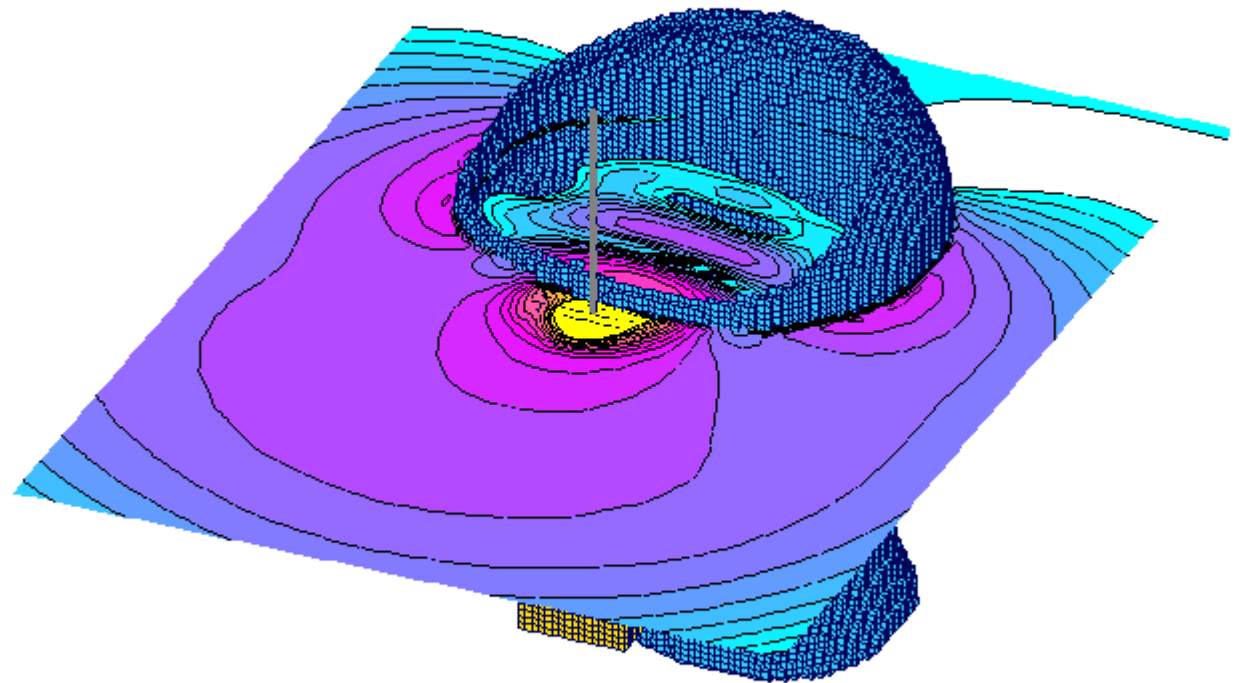
1990:

$24 \times 48 \times 100 = 115'200$  Zellen  
691'000 unbekannte Zahlen  
wenige Mega-Bytes

# Maxwell-Gleichungen: numerische Lösungen

1999

2.3 Mio Zellen  
à  $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$   
14 Mio Unbekannte  
Rechenzeit: Tage

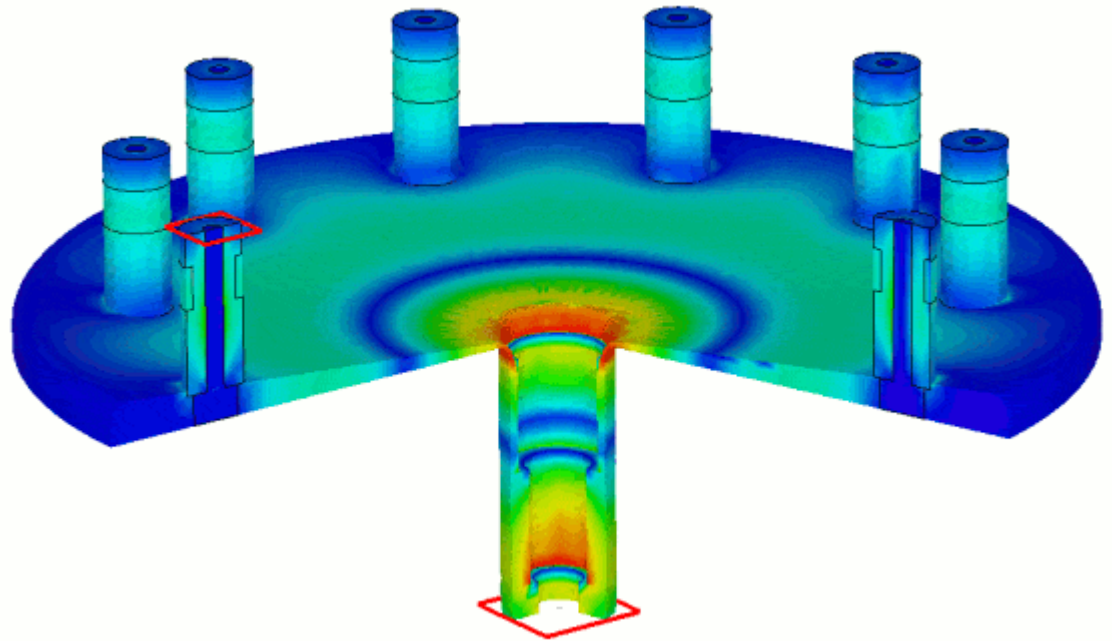


Michael Burkhard, Diss. ETH


# Maxwell-Gleichungen: numerische Lösungen

**2013:**

16 Mio Zellen  
100 Mio Unbekannte  
Rechenzeit: 4.5 h



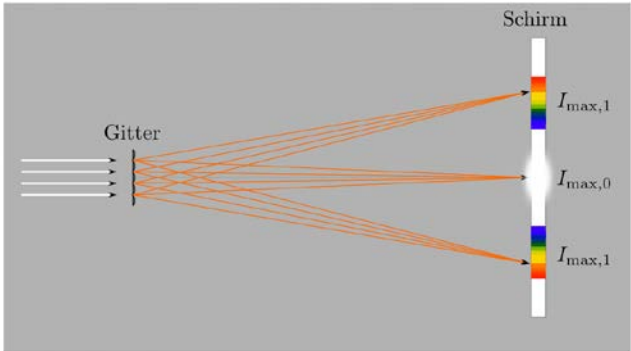
de Villiers & Meyer, CST



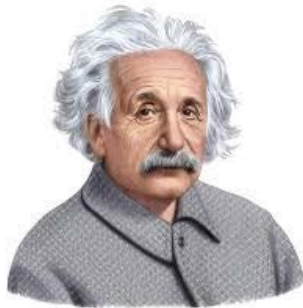
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$


**Licht ins Licht gebracht**



**Relativitätstheorie**



- Mobilfunk
- opt. Übertragung
- Solarzellen
- WLAN
- MRI
- med. Diagnostik  
& Therapie
- Kosmetik
- ⋮

**Danke für  
Ihre Aufmerksamkeit!**

**Fragen?**