

Satellitenavigation – Relativitätstheorie im täglichen Leben

Urs Hugentobler
Technische Universität München

Naturwissenschaftliche Gesellschaft Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften, Winterthur
25. November 2016



Start von 4 Galileo Satelliten am 17.11.2017 mit einer Ariane 5 (Bild: ESA)

TAROT REUNION - CNES - CNRS

Aussetzen der Galileo Satelliten
15-18, aufgenommen mit Teleskop
in La Reunion (Bild:CNES/CNRS)



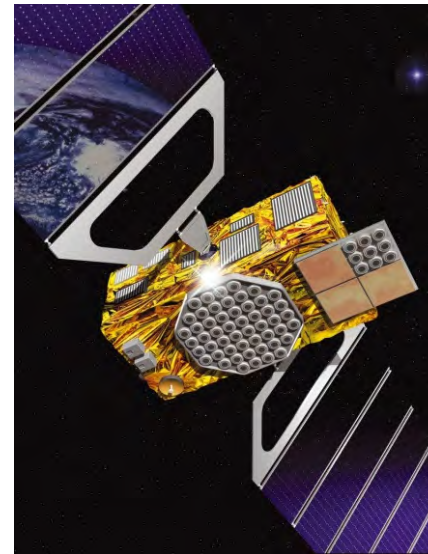
Neue Global Navigation Satellite Systeme (GNSS)



GPS



GLONASS



Galileo



Compass



- Bald mehr als 100 Navigationssatelliten am Himmel

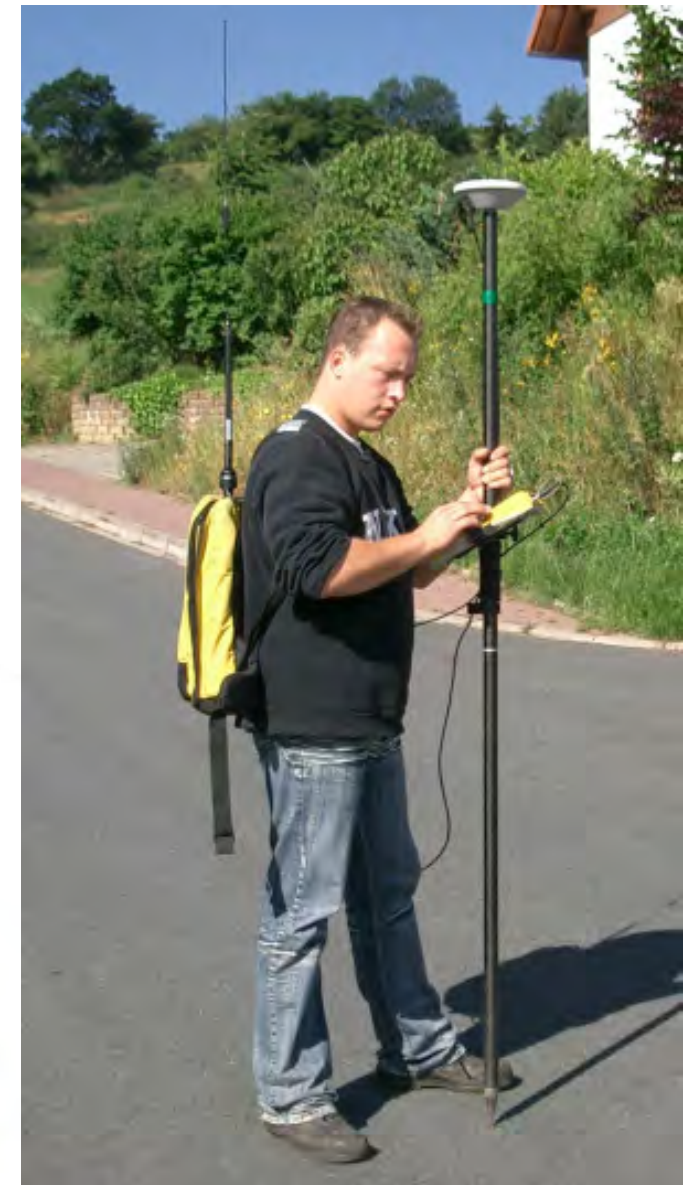
GNSS im täglichen Leben



Genauigkeit ca. 3-10 m

GNSS in der Praxis

- Vermessung
- Bauwesen
- Überwachung
- Kataster
- Landwirtschaft
- ...



GNSS in der Praxis

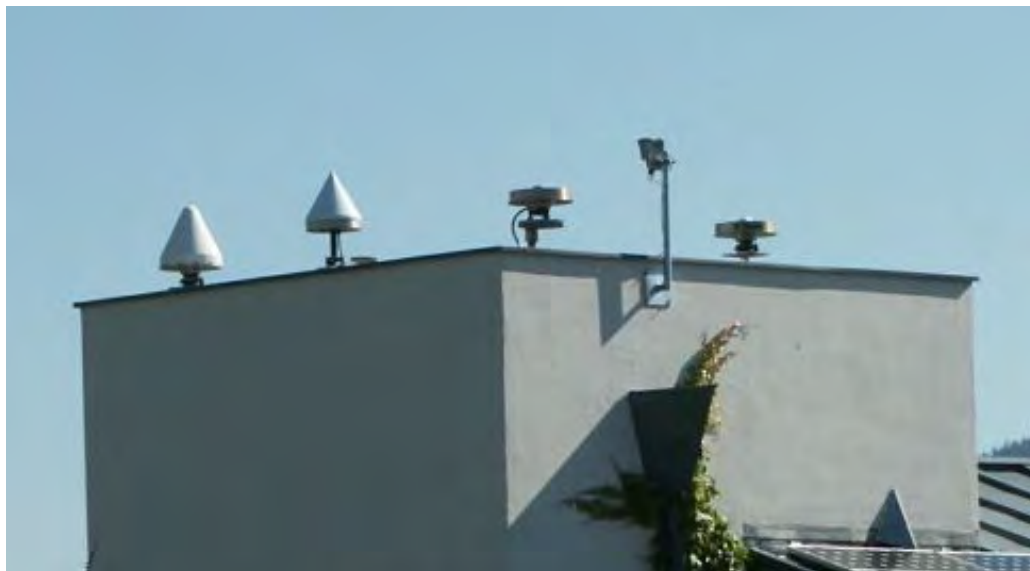
Geodätische Empfänger

Landesvermessung

Erdvermessung

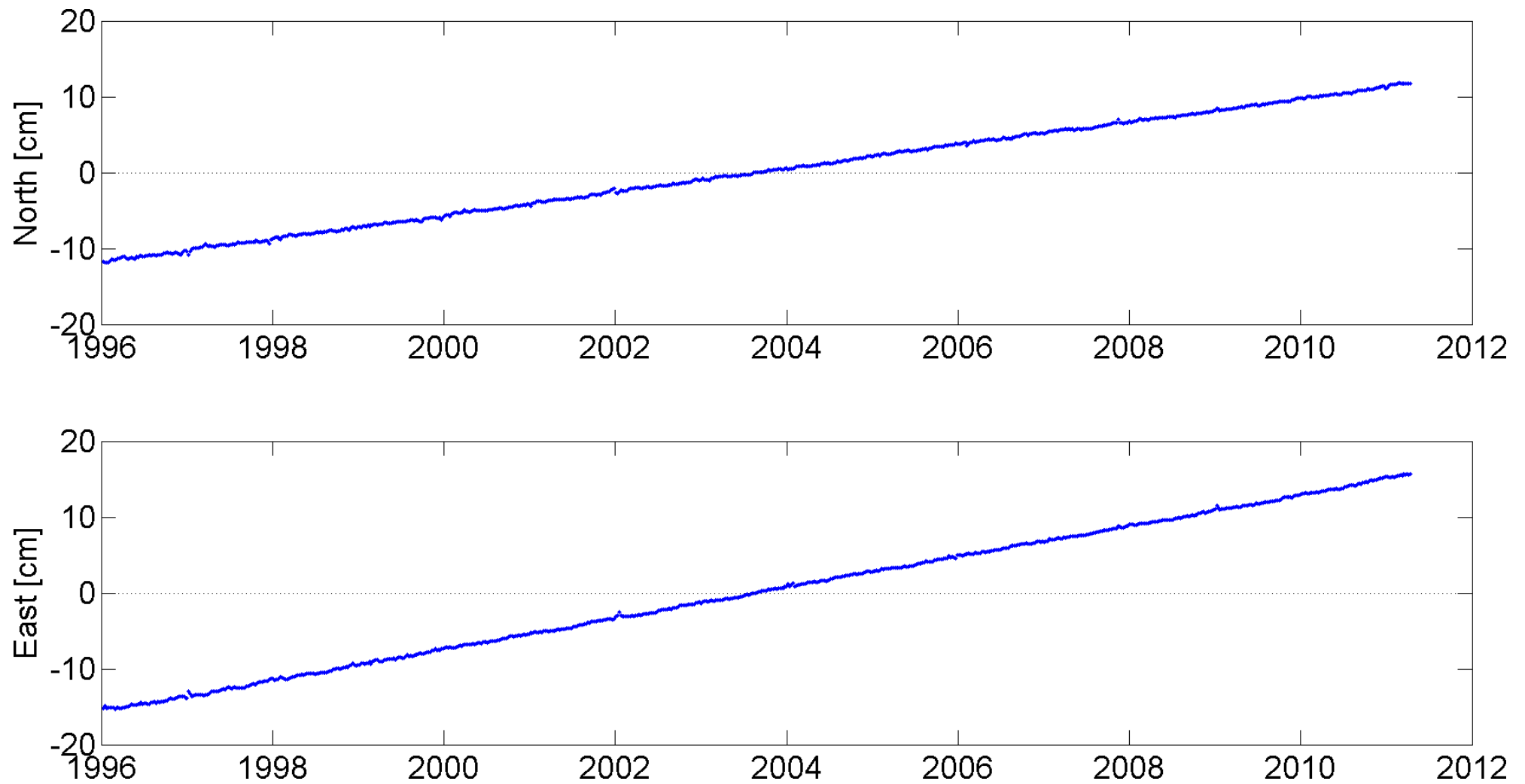
Geodynamik

...

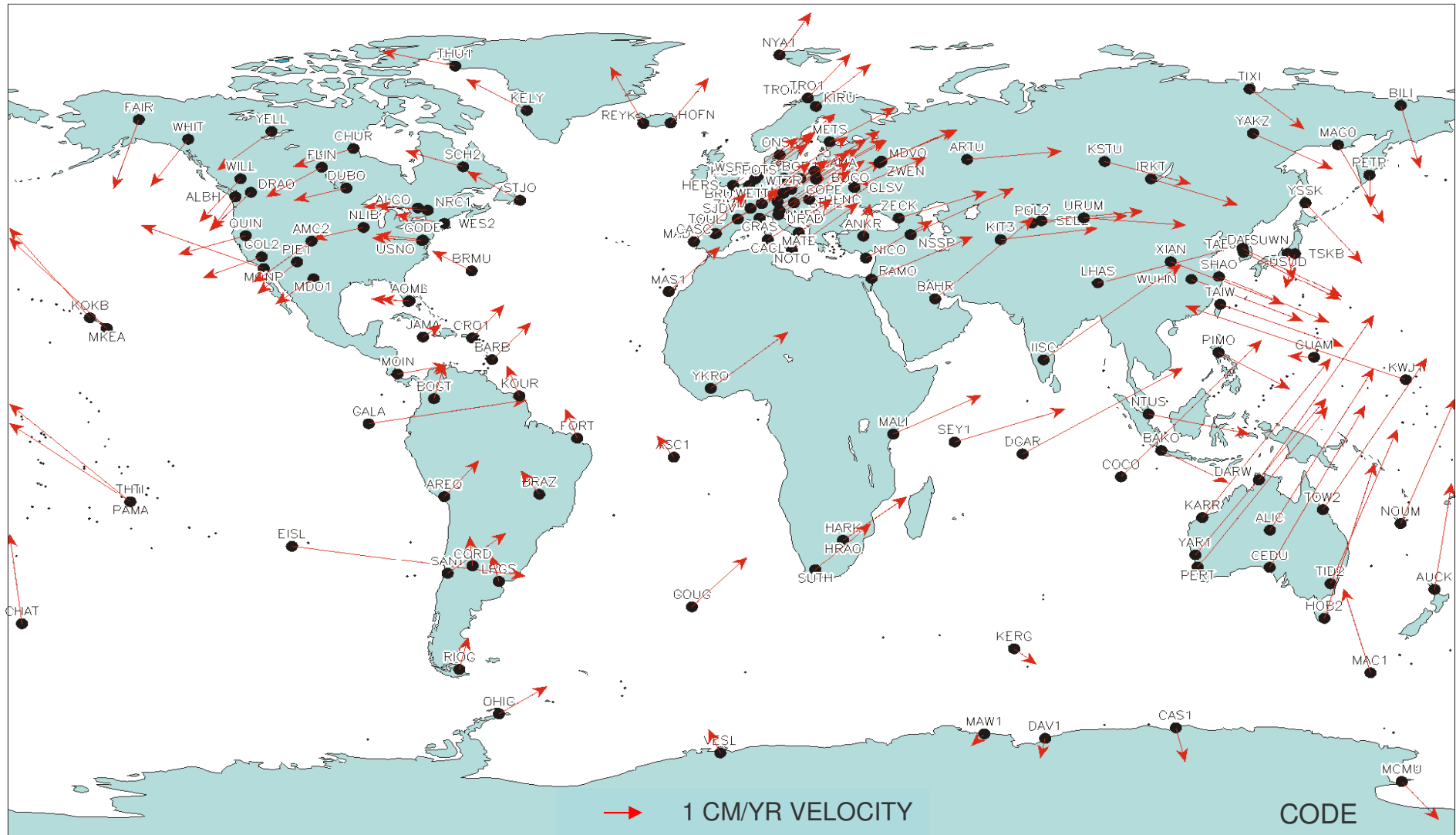


Präzision cm - mm

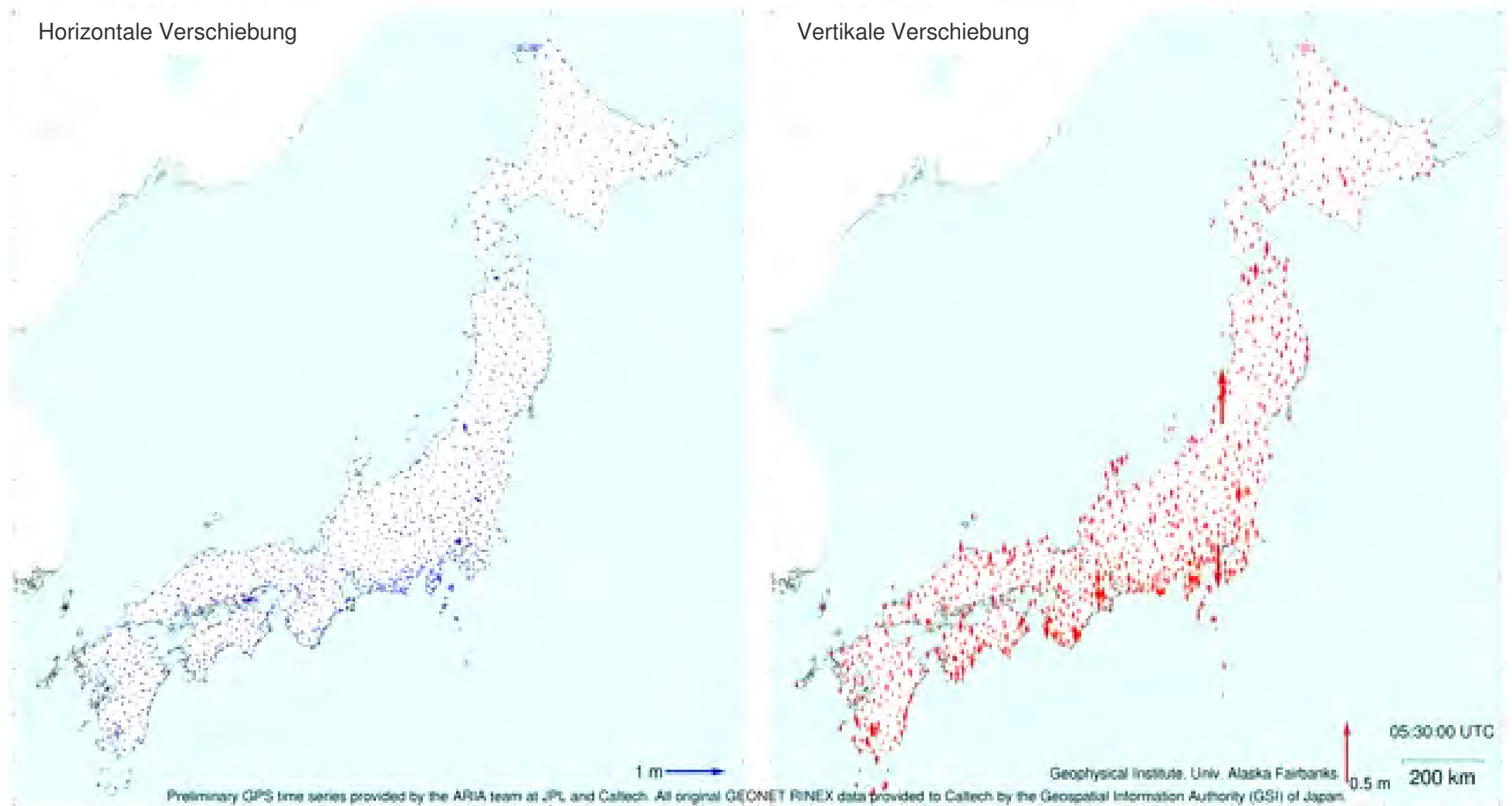
Verschiebung des Observatoriums Wettzell



Kontinentalverschiebung



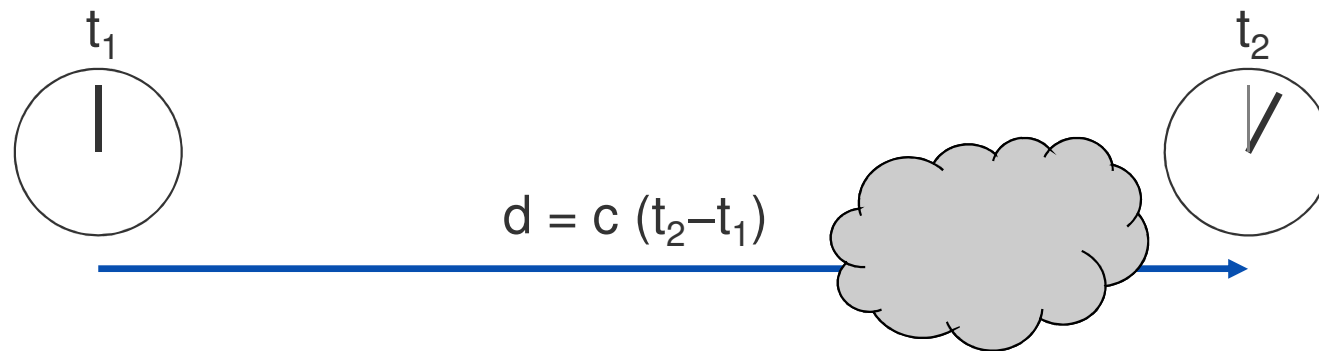
Tohoku Erdbeben am 11. März 2011



Inhalt

- Messprinzip
- Relevanz der Uhren
- Relativistische Effekte
- Würde GNSS funktionieren ohne Relativitätstheorie?

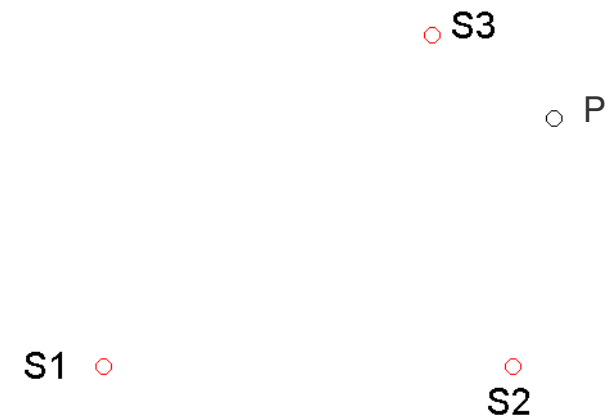
Messprinzip



- Messung der Signallaufzeit
- Einwegmessung, erfordert Synchronisation der Uhren
→ 10 ps gefordert
- Atmosphäre beeinflusst Ausbreitungsgeschwindigkeit
→ verursacht 2.3 m Verzögerung in Zenitrichtung

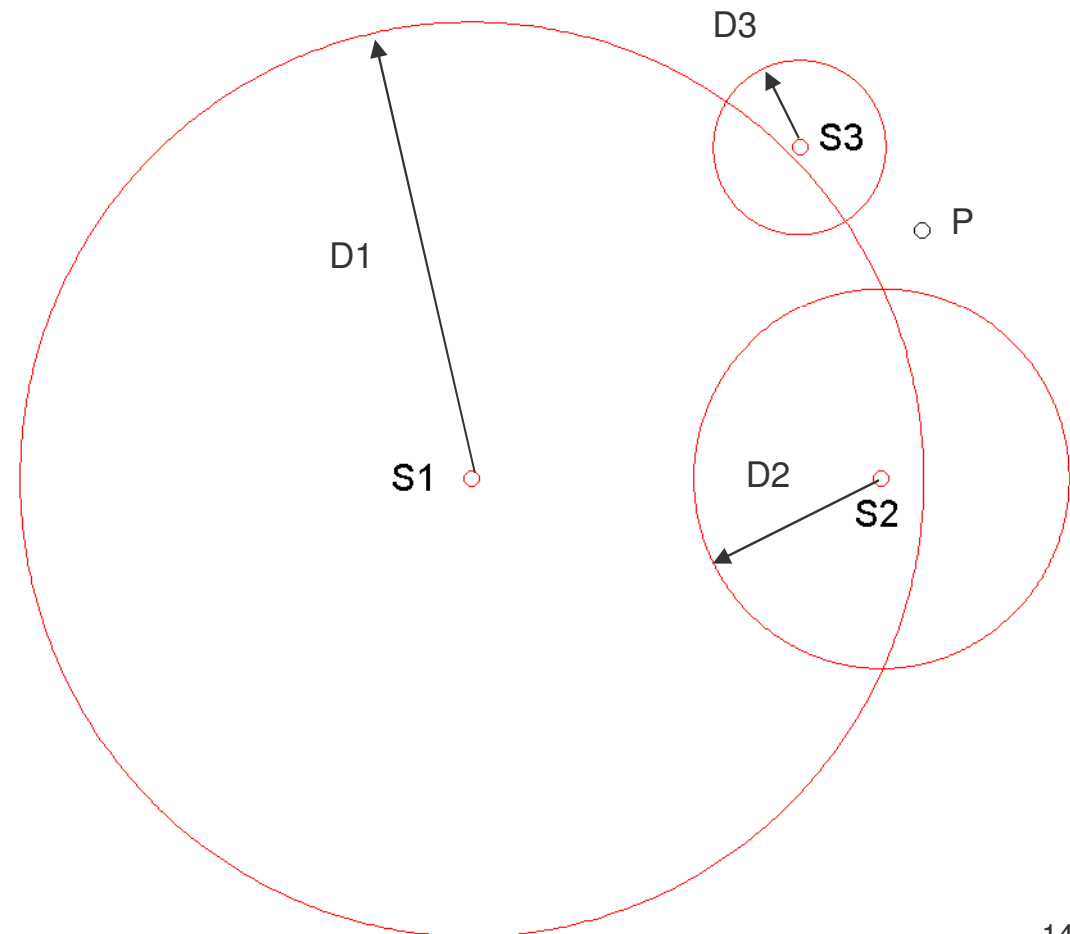
Messprinzip

- Bekannt:
Koordinaten der Satelliten
S1, S2, S3
- Gesucht:
Empfängerkoordinaten P



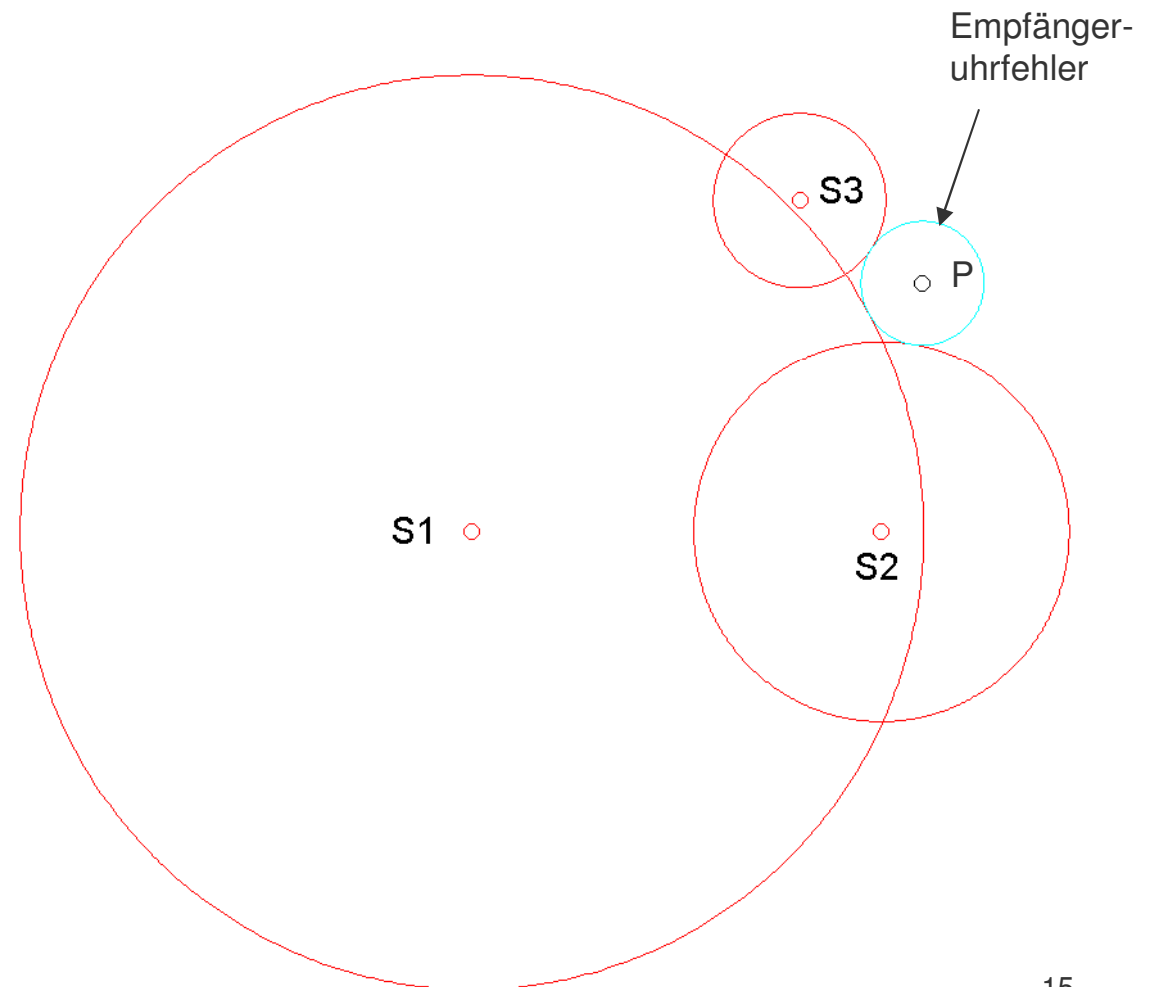
Messprinzip

- Bekannt:
Koordinaten der Satelliten
S1, S2, S3
- Gesucht:
Empfängerkoordinaten P
- Gemessen:
Pseudodistanzen
D1, D2, D3



Messprinzip

- Bekannt:
Koordinaten der Satelliten
S1, S2, S3
- Gesucht:
Empfängerkoordinaten P
- Gemessen:
Pseudodistanzen
D1, D2, D3
- Empfängeruhrfehler:
identisch für alle
Pseudodistanzen



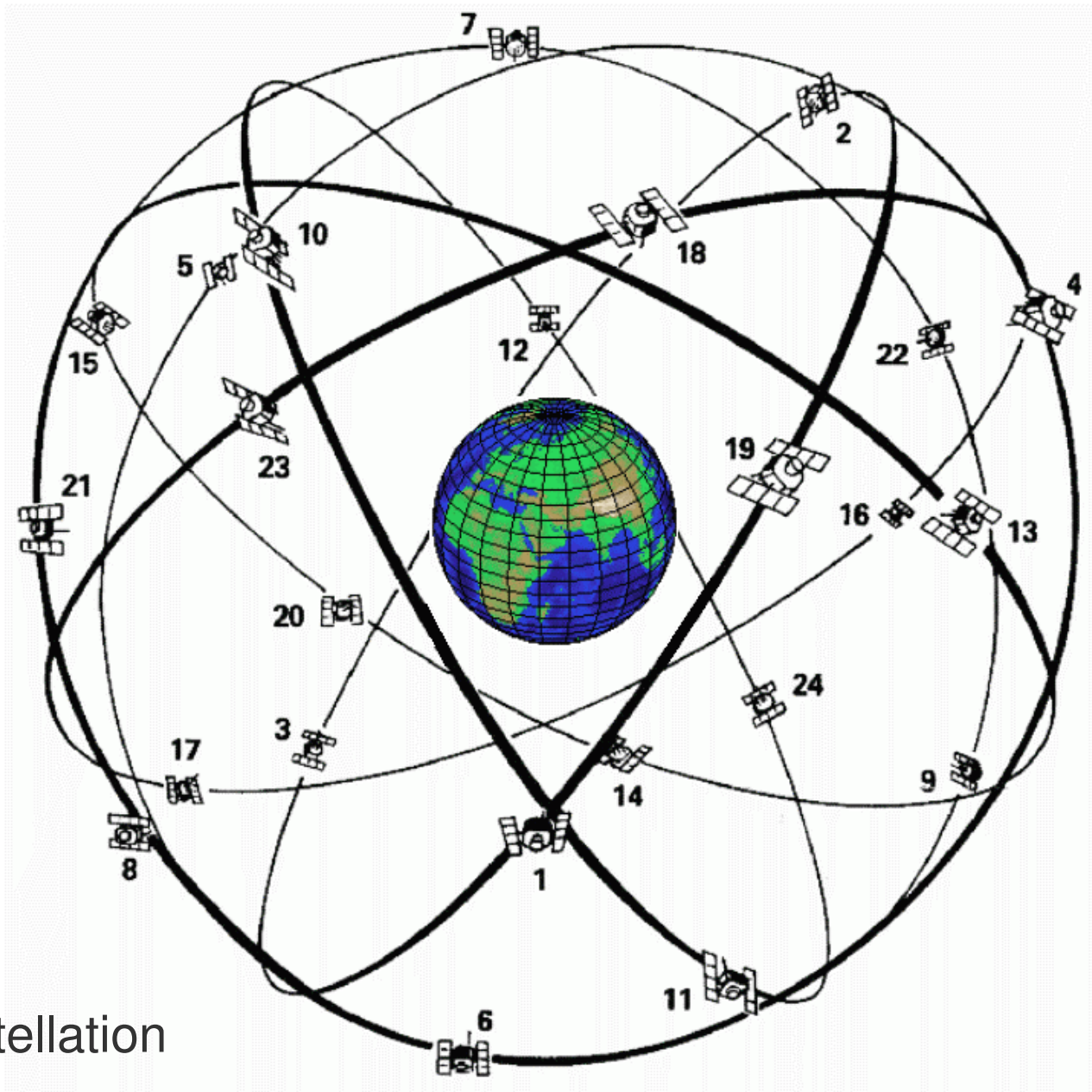
Konzept von GNSS

- Empfänger sehen 'vier' Satelliten gleichzeitig
- Satelliten sehen 'vier' Empfänger gleichzeitig
- Kohärente Generation der Signale im Satelliten
- Synchrone Messung aller Signale in den Empfängern
 - Konstellation von Satelliten erforderlich
 - Alle Uhren können aus den Messungen synchronisiert werden
 - Uhren sind zentral für GNSS
- **Paradox:** Keine hochpräzisen Uhren erforderlich für präzise Positionierung, obwohl die Technik auf präziser Messung der Signallaufzeiten beruht!

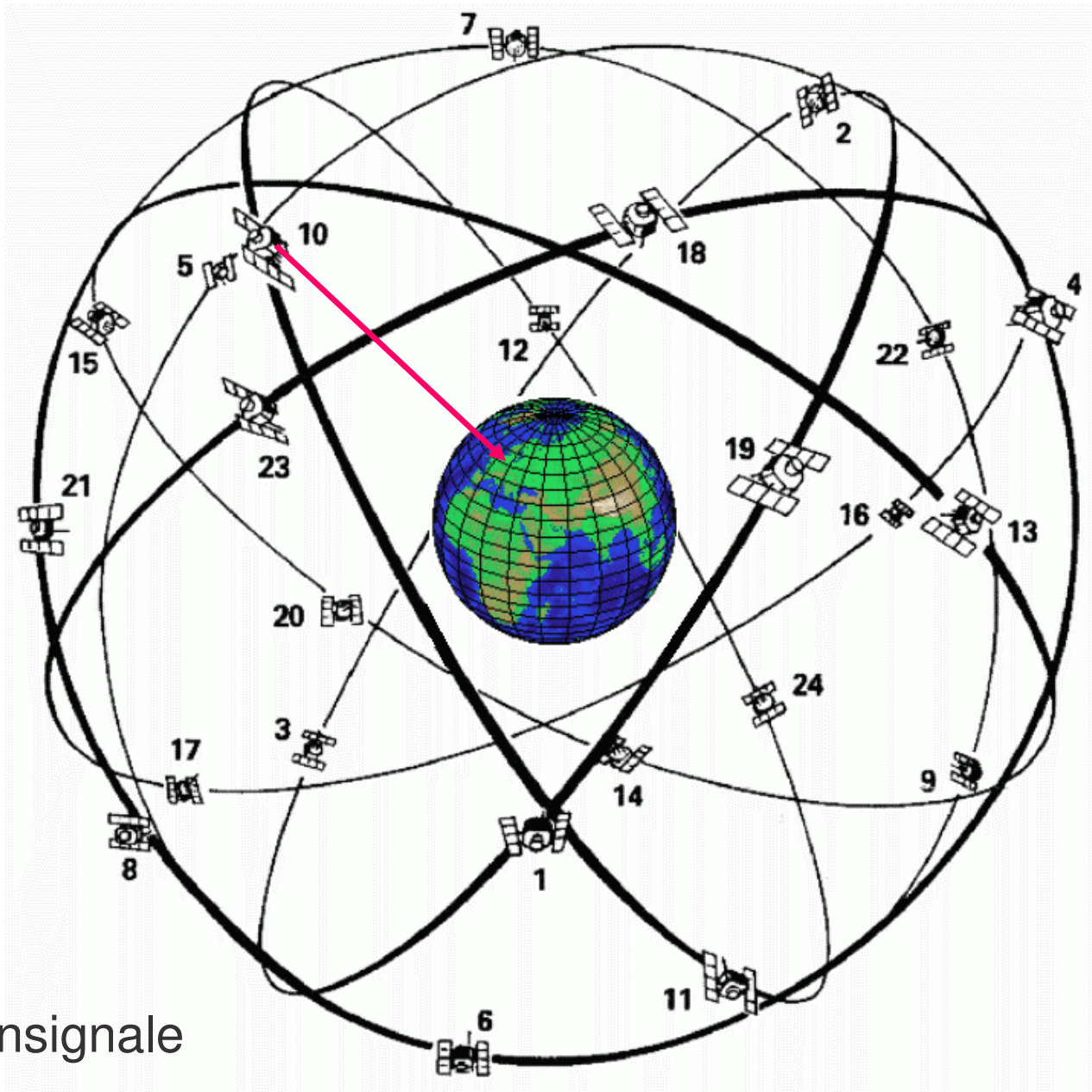
Sehr stabile Satellitenuhren



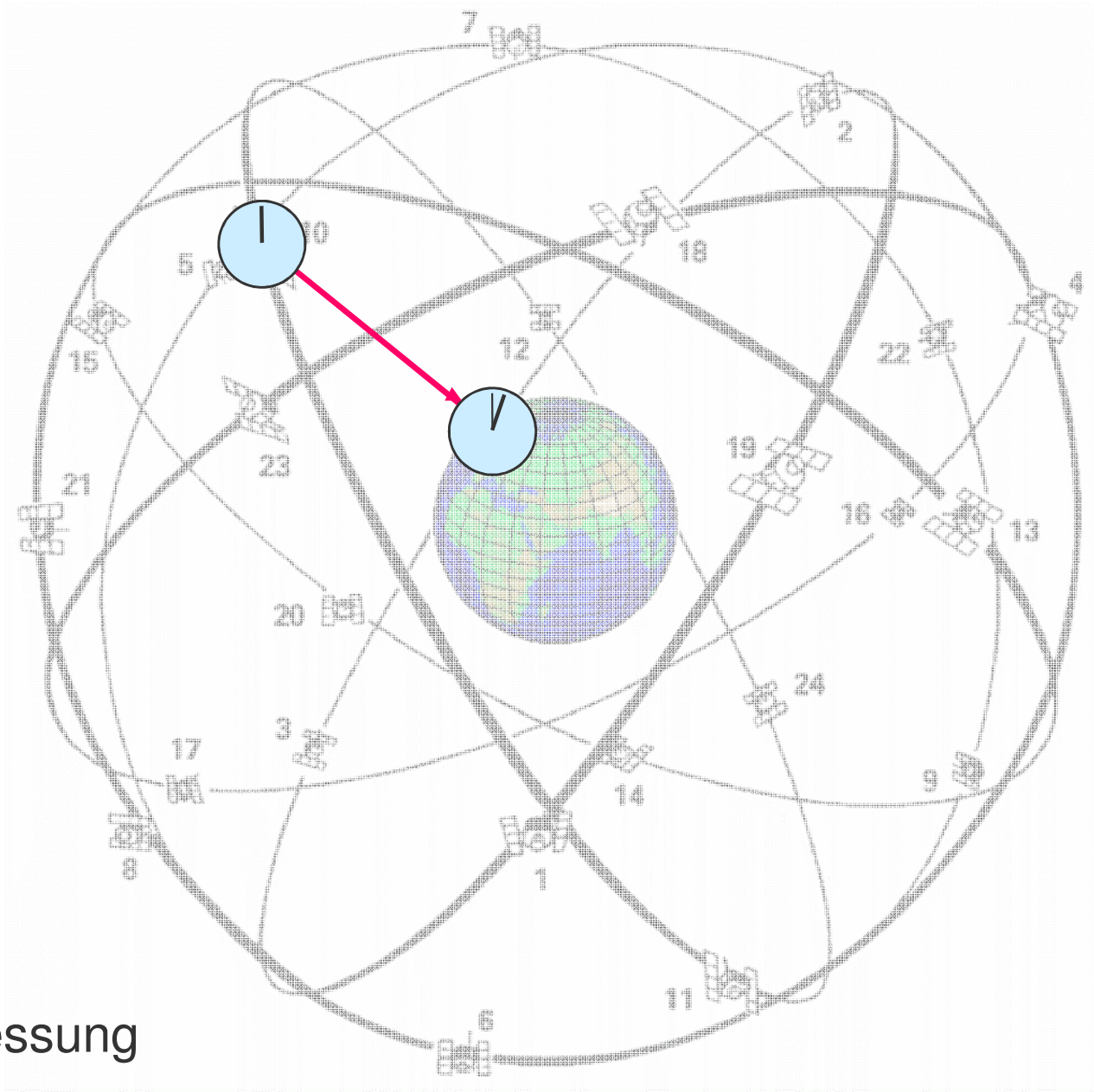
ESA



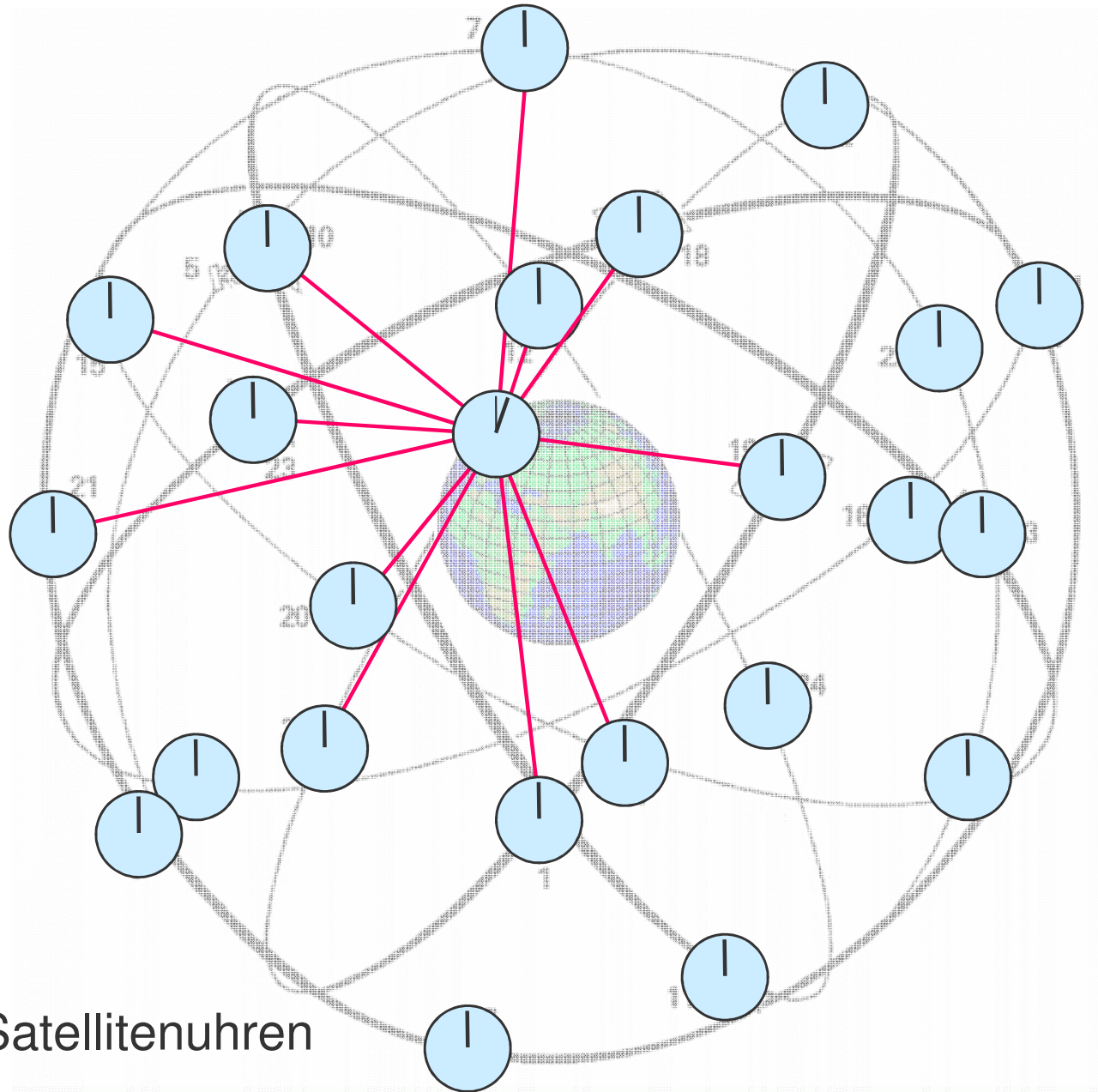
GPS Konstellation



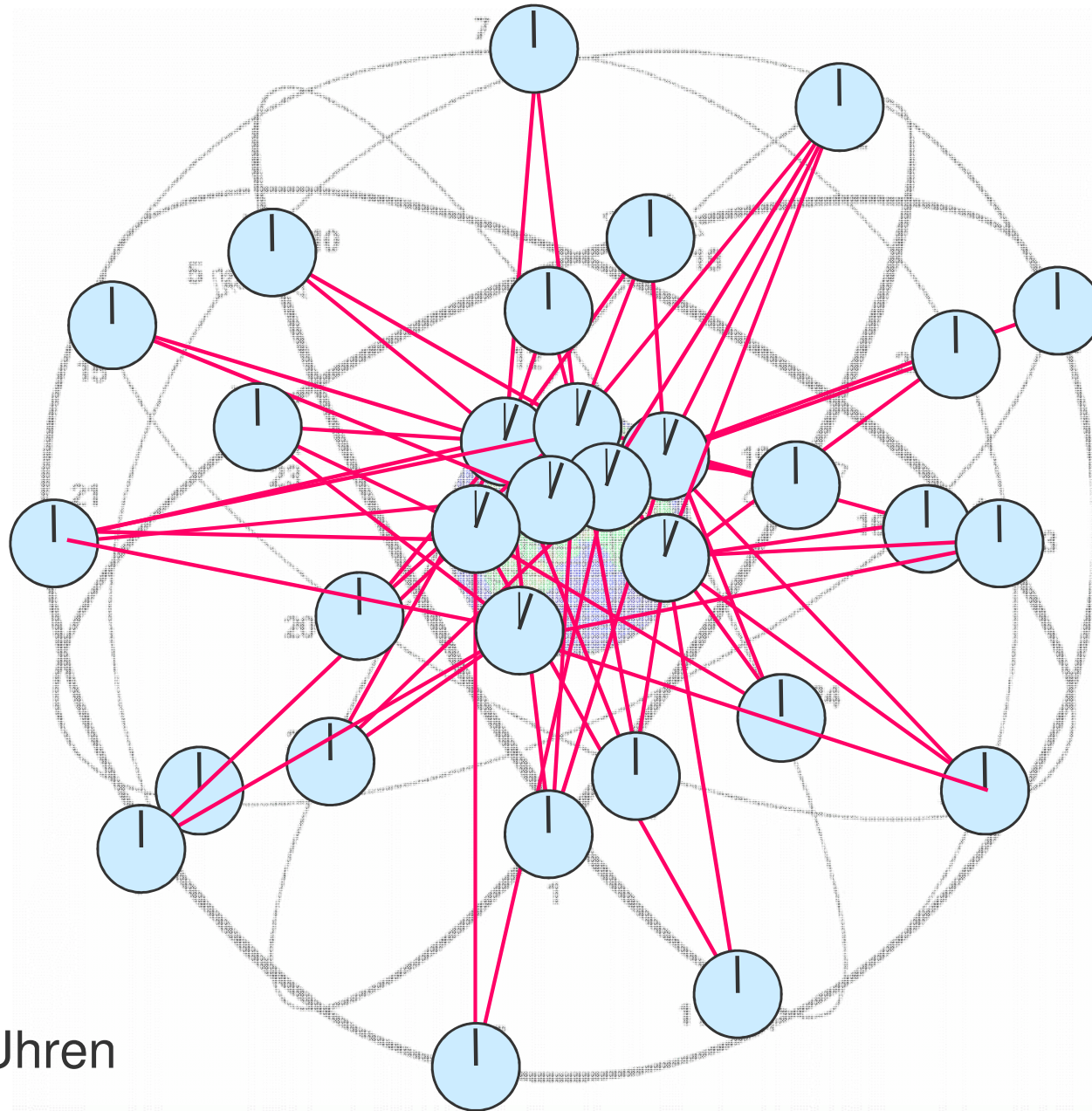
Mikrowellensignale



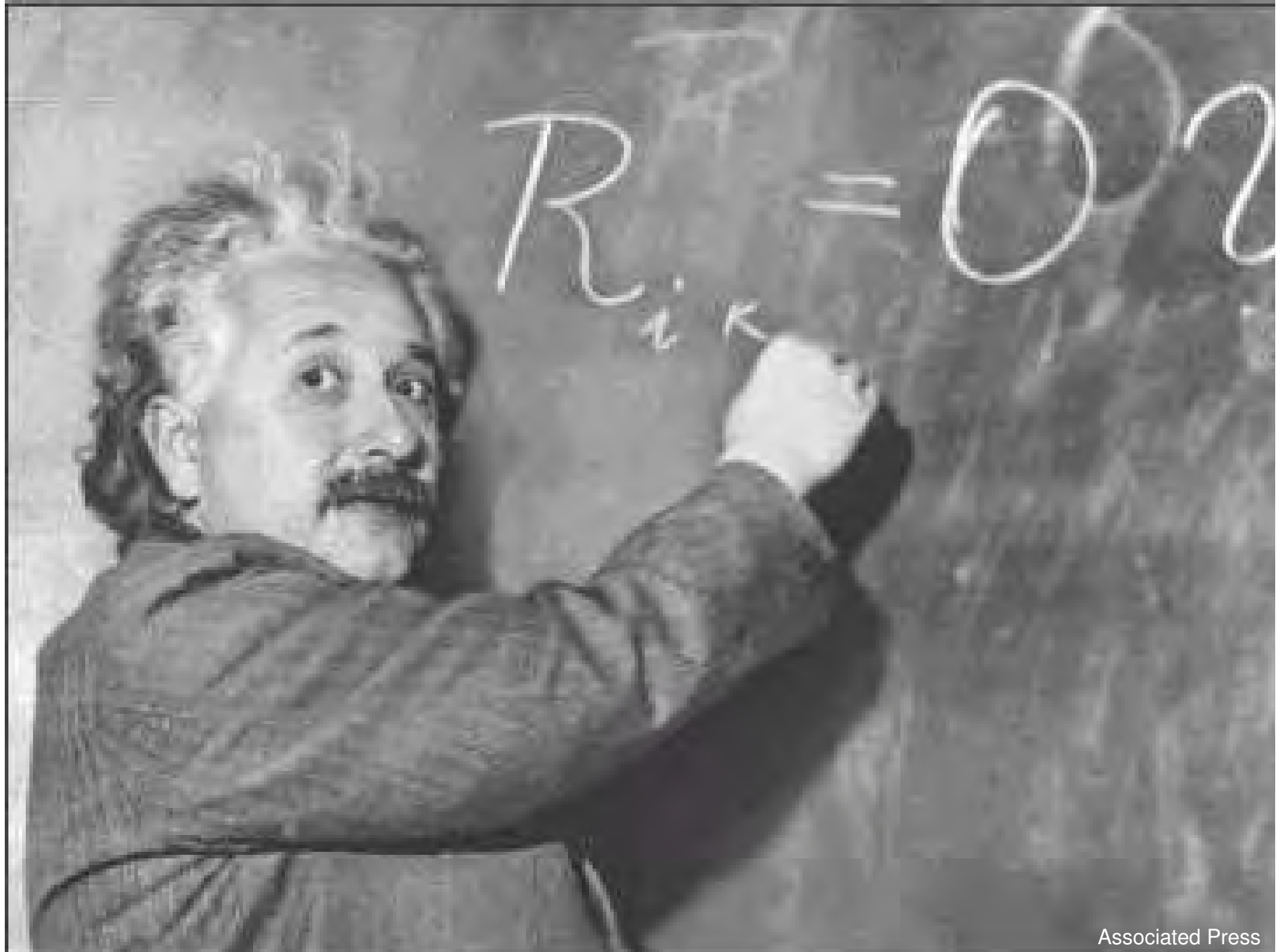
Laufzeitmessung



Netz von Satellitenuhren



Netz von Uhren



$$R_{ik} = 0$$
$$E = mc^2$$

Relativistische Effekte bei GNSS

Satellitenbahnen

- Raumkrümmung durch die Masse der Erde und der Sonne
- Schwarzschild, deSitter, Lense-Thirring
- Perigäumsdrehung, Präzession der Bahnebenen

Lichtausbreitung im gekrümmten Raum

- Lichtablenkung, Shapiro-Effekt

Satellitenuhren

- Zeitdilatation, Transversaler Dopplereffekt
- Gravitationsrotverschiebung

Bahnstörung für Galileo	Beschleunigung [m/s ²]	Bahnfehler nach 1 Tag	Bahnfehler, angepasste Bahnelemente
Erdabplattung	3.8×10^{-5}	22000 m	2700 m
Mond	3.3×10^{-6}	2700 m	270 m
Sonne	1.7×10^{-6}	1700 m	100 m
Höhere Geopotentialerme	2.4×10^{-7}	340 m	30 m
Direkter Strahlungsdruck	1.0×10^{-7}	290 m	44 m
Vernachlässigung Erdschatten	-	10 - 20 m	
Vernachlässigung Mondschatten	-	0.1 - 3 m	.
Albedo	1.0×10^{-9}	2.2 m	0.11 m
Antennen-Rückstoss (100 W)	3.9×10^{-10}	0.79 m	0.010 m
Festerdegezeiten	7.4×10^{-10}	0.67 m	0.034 m
Ozeangezeiten	7.5×10^{-11}	0.09 m	0.010 m
Allgemeine Relativitätstheorie	2.0×10^{-11}	0.33 m	0.004 m
Venus	1.9×10^{-10}	0.20 m	0.011 m
Jupiter	2.5×10^{-11}	0.024 m	0.0018 m
Mars	1.7×10^{-12}	0.002 m	0.0004 m

Relativistische Effekte auf die GNSS Satellitenbahnen

Satellitenbahnen:

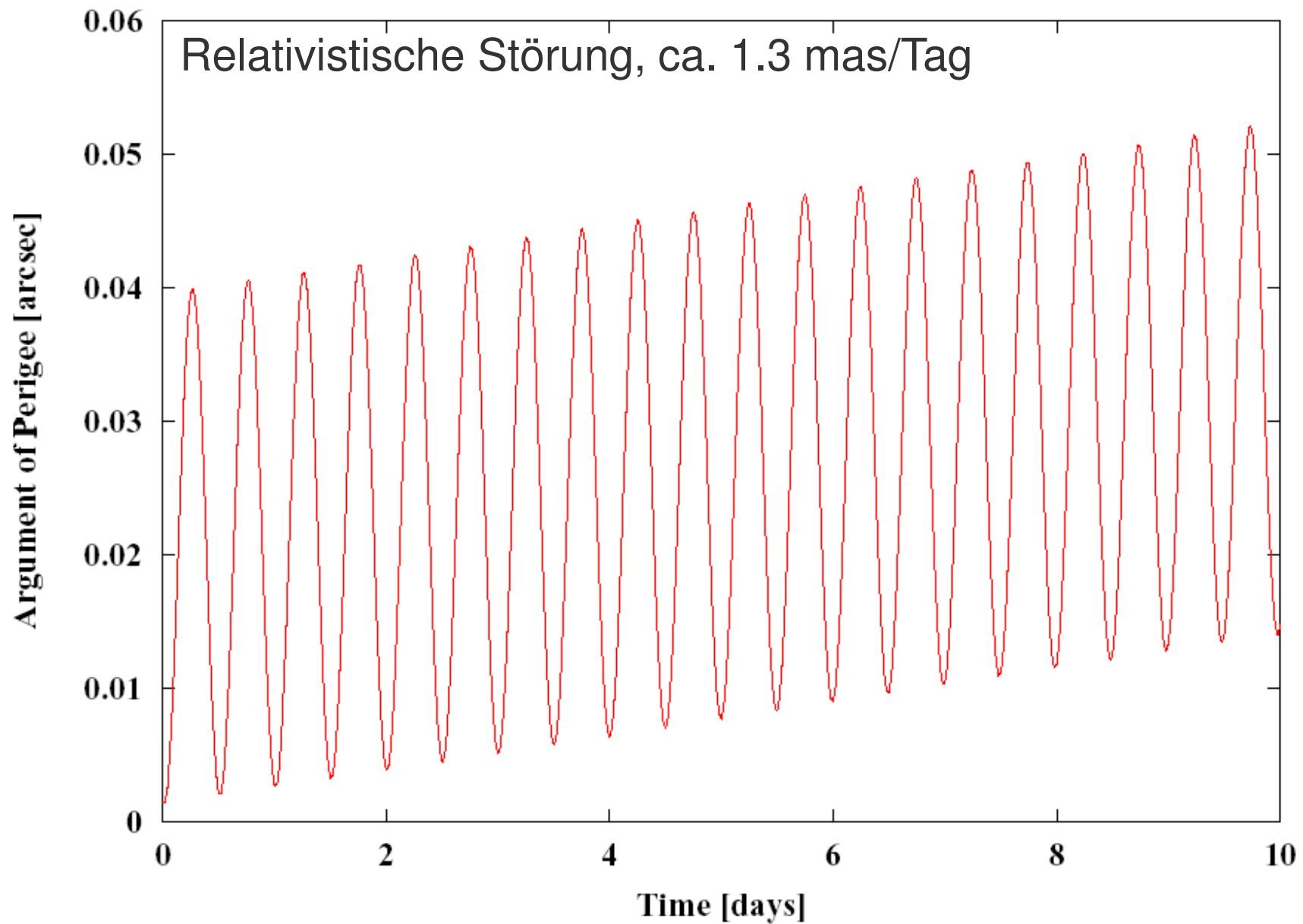
- Raumkrümmung durch die Masse der Erde
- Schwarzschild, Post-Newton'sche Näherung

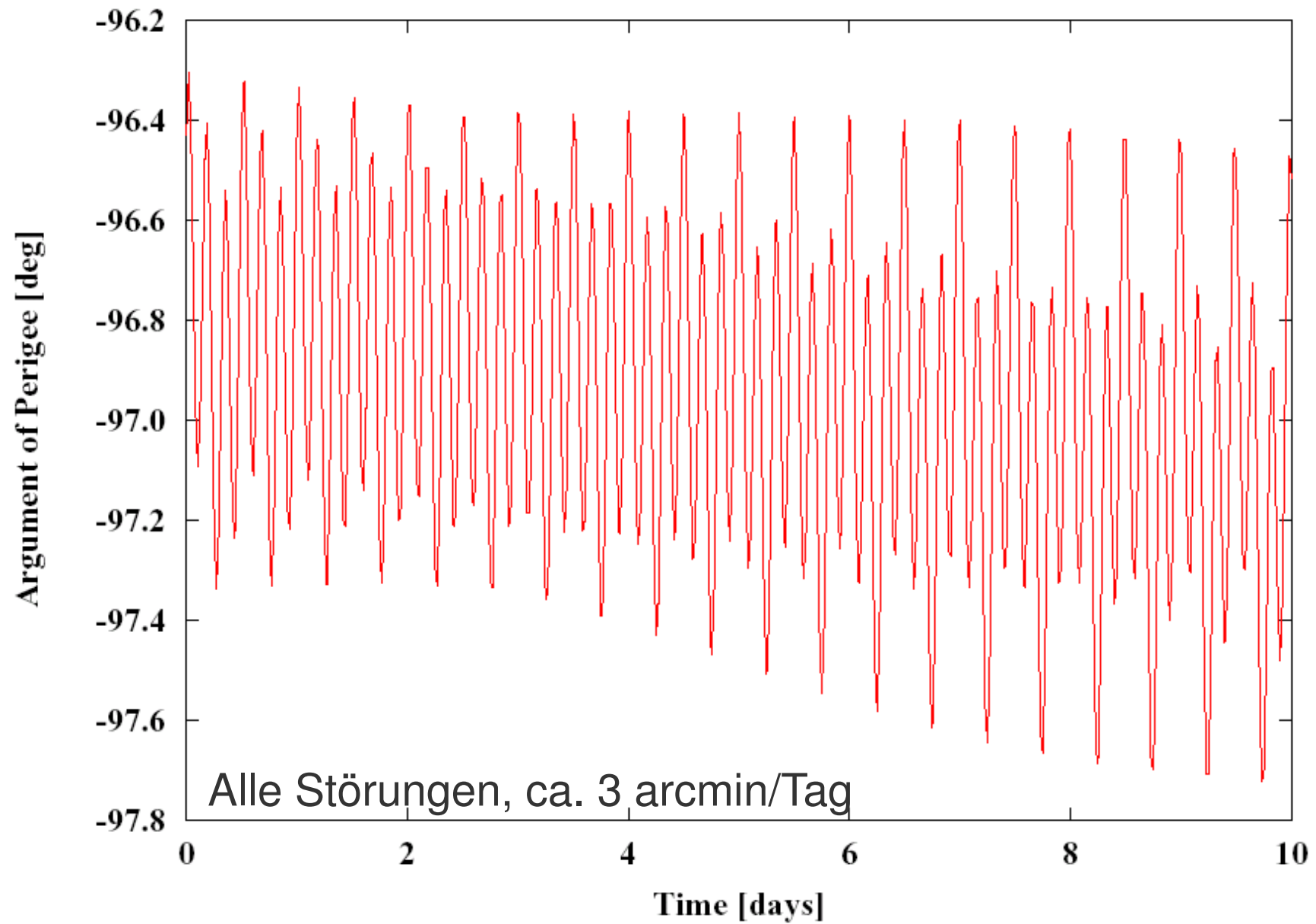
$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = \frac{GM}{c^2 r^3} \left\{ \left[\frac{4GM}{r} - \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right] \vec{\mathbf{r}} + 4(\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \right\}$$

Perigäumsdrehung

$$\Delta\omega = \frac{6\pi}{a(1-e^2)} \frac{GM}{c^2}$$

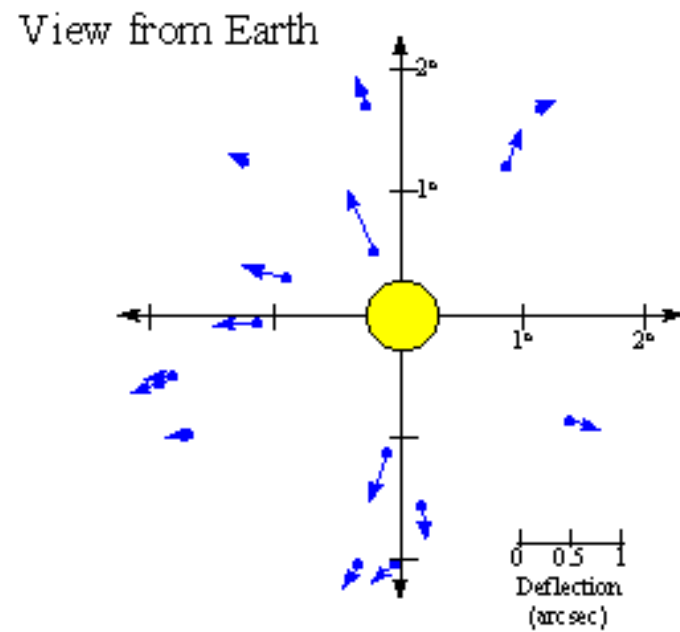
- Merkur: 43" pro Jahrhundert
0.104" pro Umlauf
- GNSS: 0.7 mas/Umlauf
1.3 mas/Tag \approx 17 cm / Tag



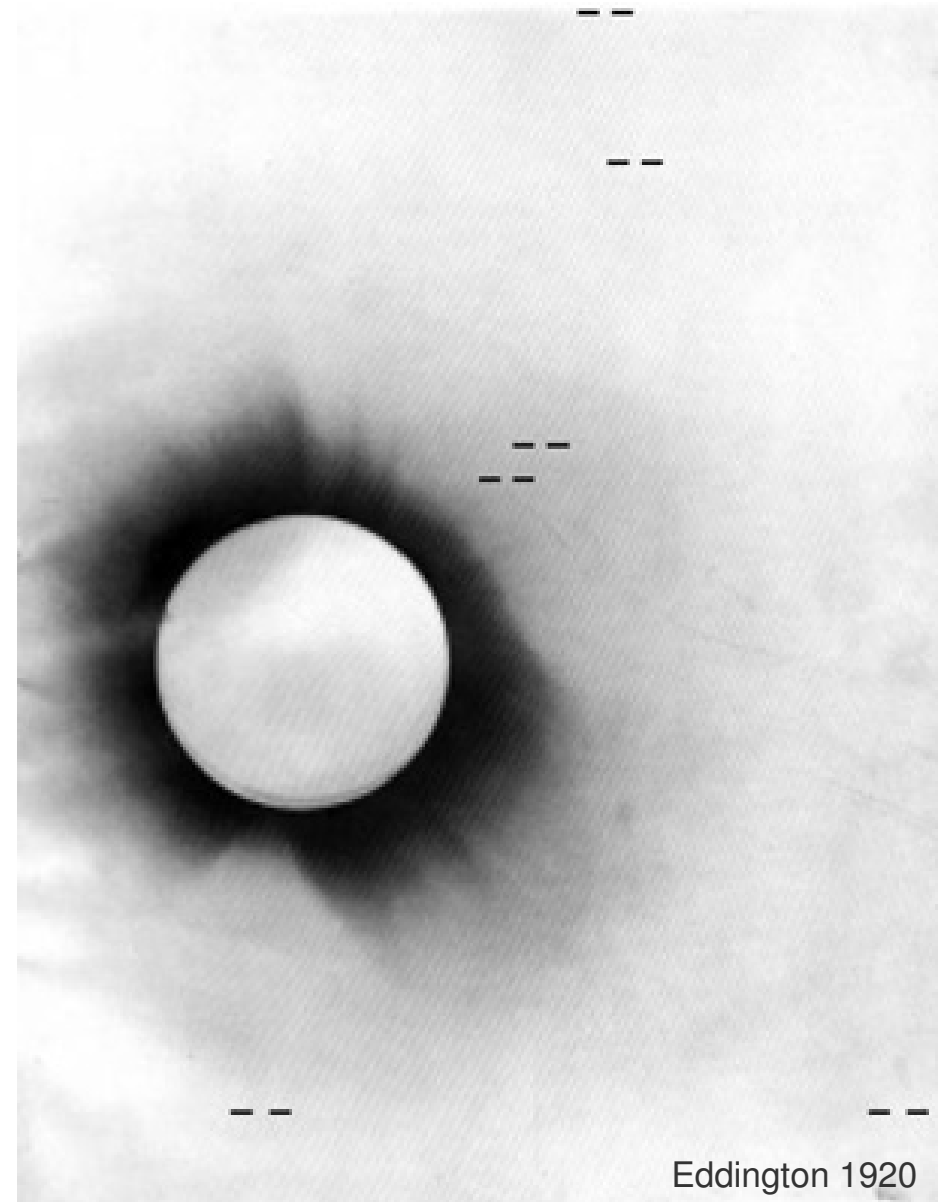


Lichtablenkung

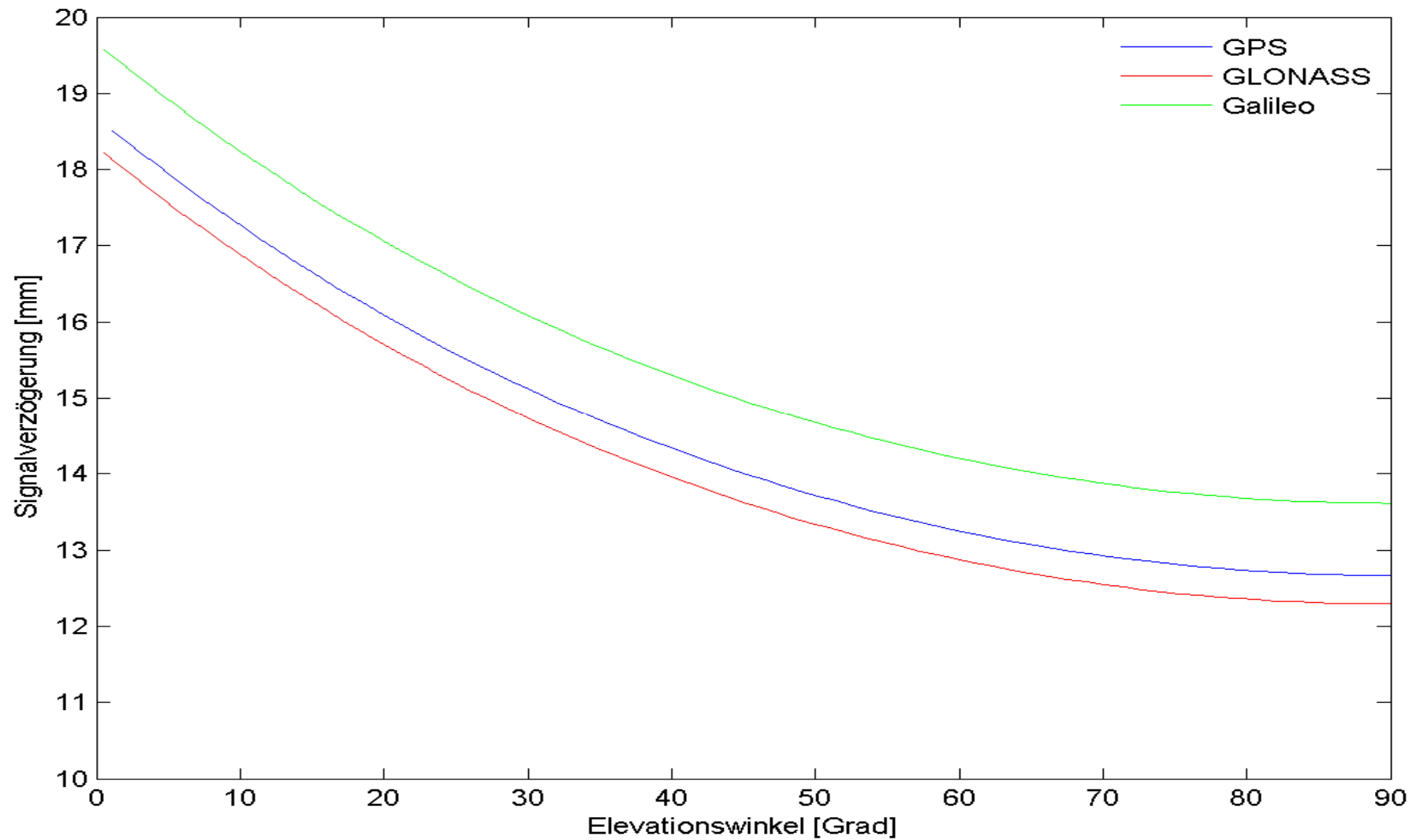
- Sonnenfinsternis 1919
- relativistisch: $1.75''$



R. Pogge, 2006



Gravitationelle Verzögerung der Signale



Einfluss auf Satellitenbahnen und Stationskoordinaten

Lichtablenkung:

- GNSS Bahnen:
Änderung der Bahnhöhe 0.0 mm
- GNSS Stationen:
Änderung der Stationshöhe -4.6 mm

Relativistische Effekte der Satellitenuhren

Spezielle Relativitätstheorie:

- Bewegte Uhren laufen langsamer
- GNSS Satelliten bewegen sich mit ca. 4 km/s
- Die Uhren an Bord laufen entsprechend *langsamer* bezüglich eines Beobachters am Boden

Allgemeine Relativitätstheorie:

- Uhren in grösserer Höhe laufen schneller
- GNSS Satelliten fliegen in einer Höhe von ca. 20'000 km in geringerem Schwerepotential als der Beobachter am Boden.
- Die Uhren an Bord laufen entsprechend *schneller* bezüglich eines Beobachters am Boden

Satellitenuhren

Transversaler Dopplereffekt

- Frequenzverschiebung wegen Geschwindigkeit

$$1 + \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Für mittlere Fluggeschwindigkeit für GNSS Satelliten

$$\frac{\Delta f}{f} = -7.492 \cdot 10^{-11}$$

- Uhr läuft zu langsam:

$$\Delta t_{SRT} = -6.5 \mu\text{s/Tag}$$

Satellitenuhren

Gravitationsrotverschiebung

- Frequenzverschiebung wegen Potentialdifferenz

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{U(r) - U_0}{c^2}$$

- Potential in mittlerer Satellitenhöhe und auf dem rotierenden Geoid

$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

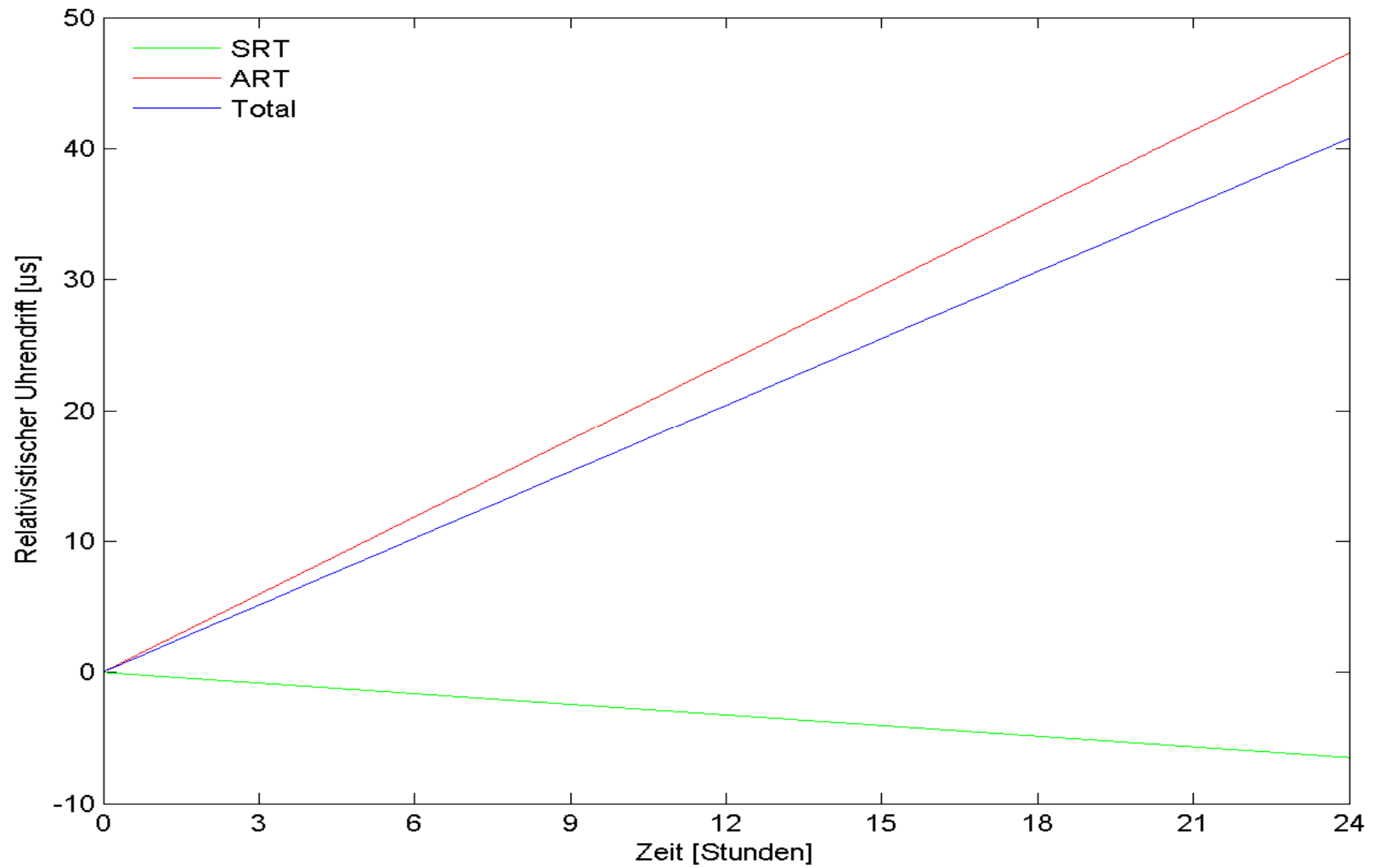
$$U_0 = -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{J_2}{2} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 R^2$$

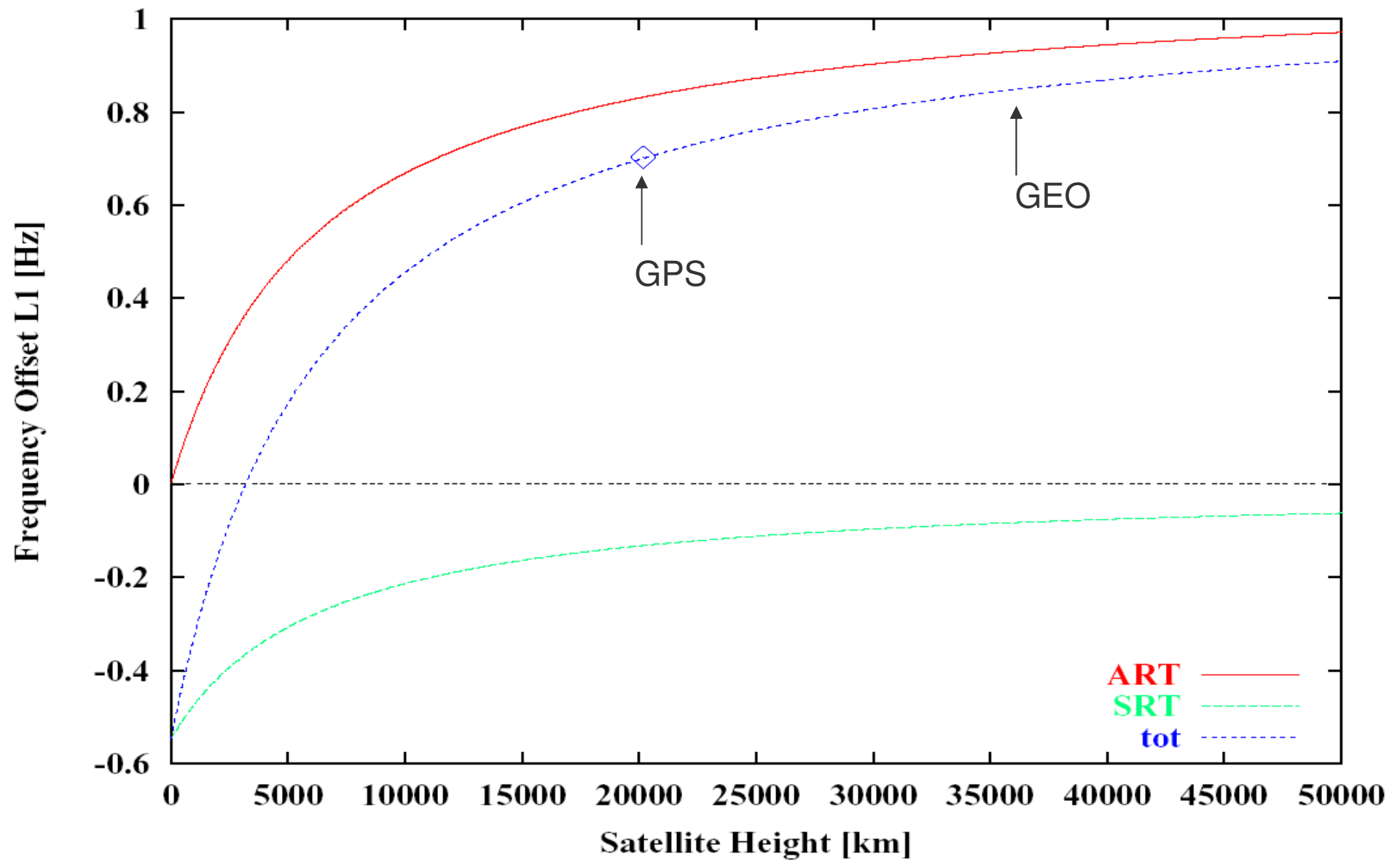
- Konstanter Beitrag:

$$\frac{\Delta f}{f} = +5.471 \cdot 10^{-10}$$

Uhr läuft zu schnell:

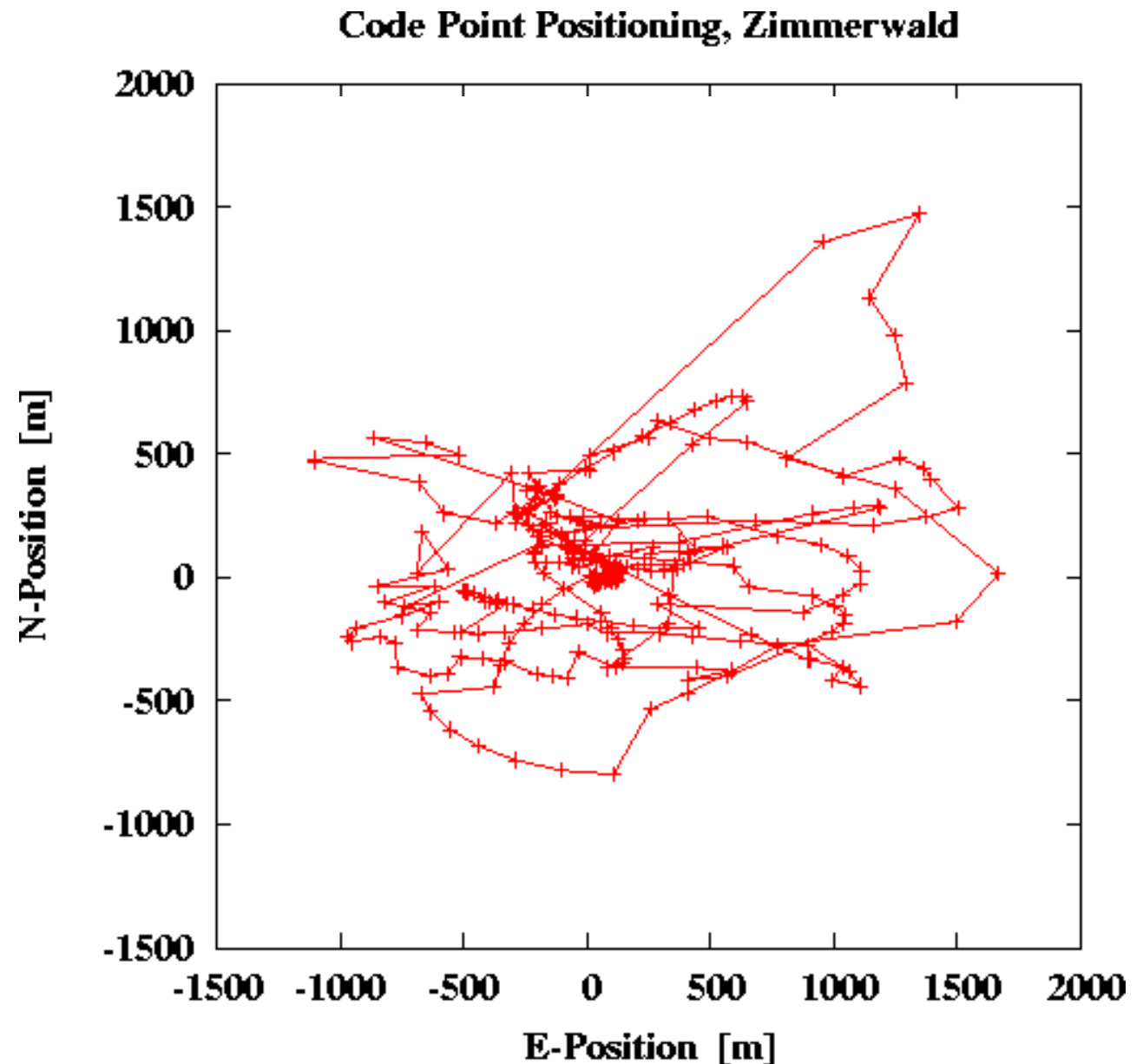
$$\Delta t_{ART} = +47 \mu\text{s/Tag}$$





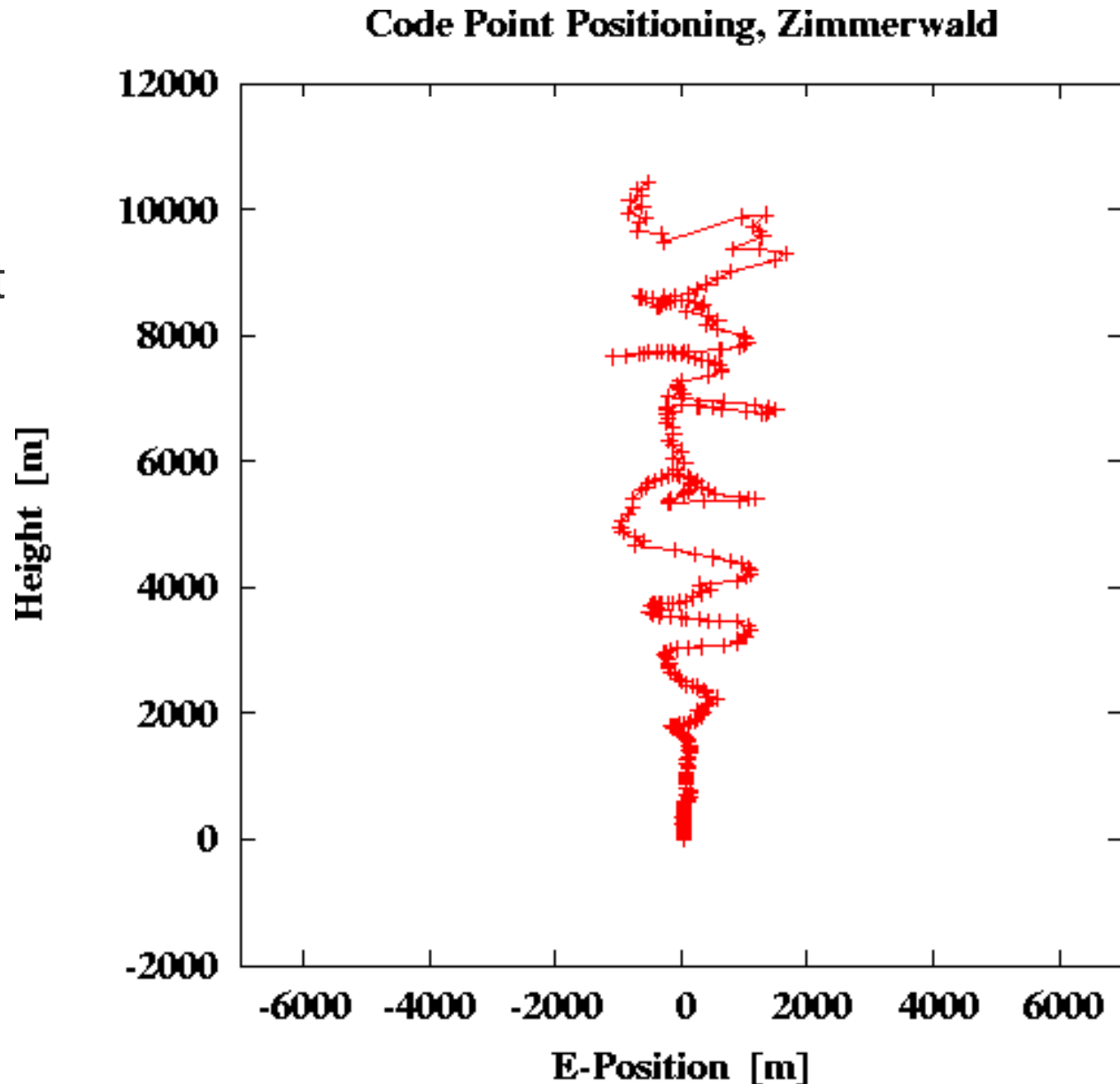
Positionierung

- Relativistischem Frequenzoffset nicht berücksichtigt



Positionierung

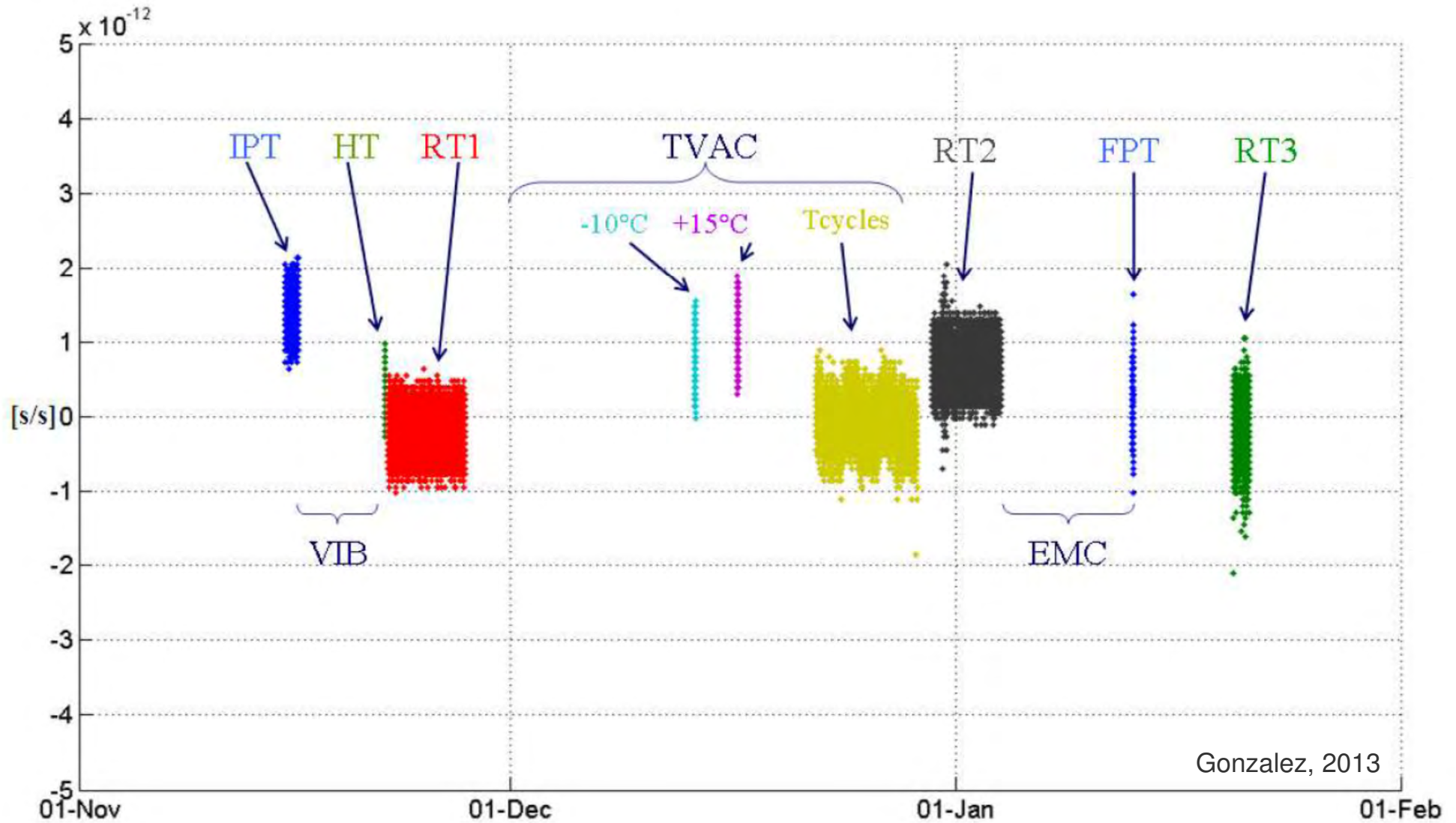
- Relativistischem Frequenzoffset nicht berücksichtigt
- Die Höhe ist 10 km falsch nach einem Tag



Erste Schlussfolgerung

- Der durch relativistische Effekte in der Satellitenuhr erzeugte Drift beträgt für Galileo $40 \mu\text{s}/\text{Tag}$.
- Positionierresultate wären also in der Größenordnung 12 km falsch schon nach einem Tag.
- Hätten wir **perfekte Uhren**, die ihre einmal eingestellte Frequenz beibehalten und wir setzen die fortwährende Synchronisation in Unkenntnis der Relativitätstheorie voraus, so würde GNSS keinesfalls funktionieren.

GIOVE-B H-Maser Bodentests



Messung der relativistischen Frequenzverschiebung

	Frequency f_0 [Hz]	Freq. Offset Δf [Hz]	$\Delta f/F_0$	
			[s/s]	[s/day]
Nominal F0	10230000.00000000	0.000000000	0	0
Ground	10229999.9959092	-0.00409083	-4.00E-10	-3.5E-05
Expected	10230000.0007357	0.00073574	7.19E-11	6.2E-06
In orbit	10230000.0007928	0.00079283	7.75E-11	6.7E-06
Delta		0.00005708	5.58E-12	4.8E-07

Gonzalez, 2013

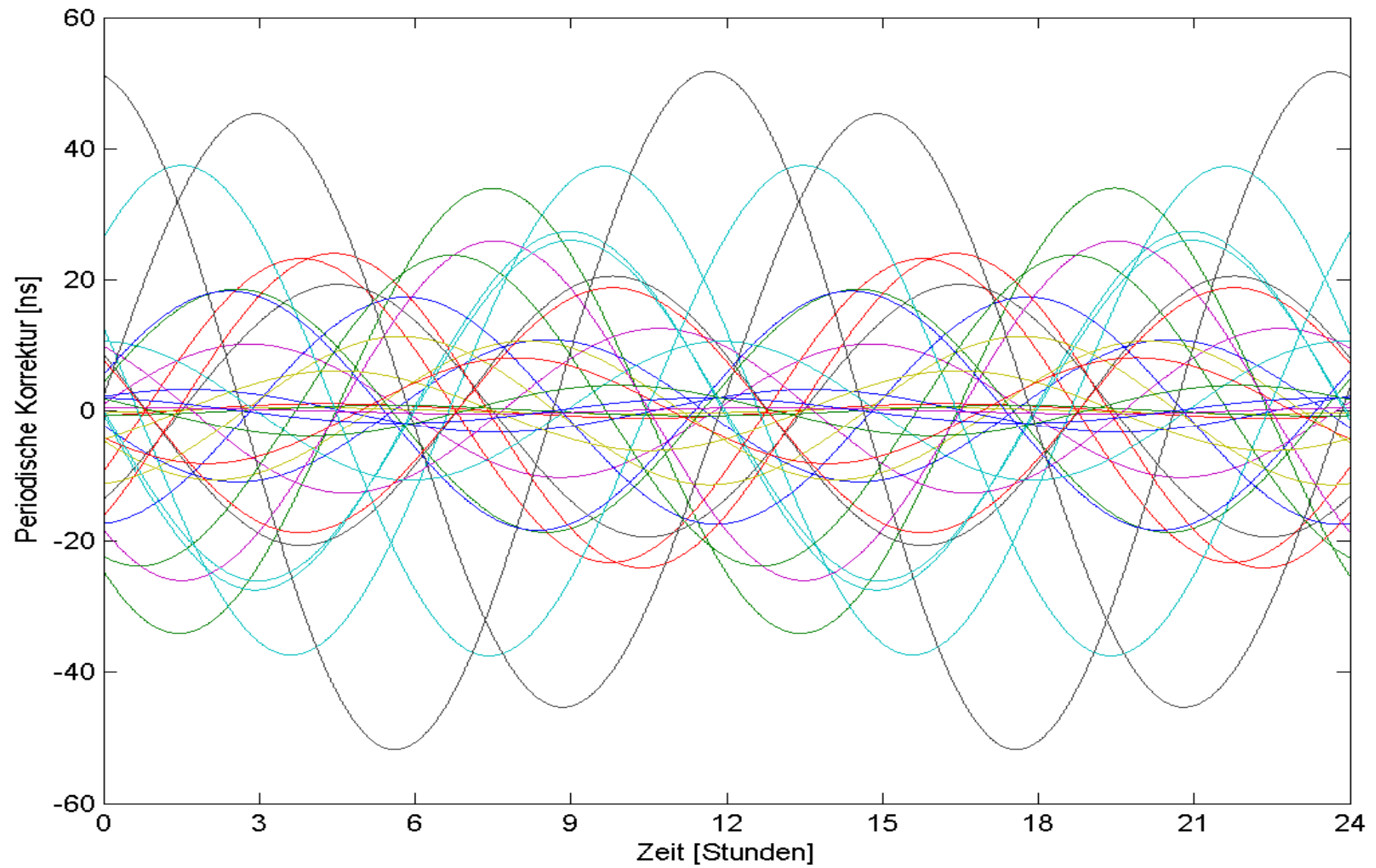
- Die Wiederholbarkeit der Frequenz des GIOVE-B H-Masers beträgt ca. 10^{-12} .
- Die Messung der Frequenz im Orbit weicht nur $5,6 \cdot 10^{-12}$ vom vorhergesagten Wert ab, was 1.2% der relativistischen Frequenzverschiebung entspricht.

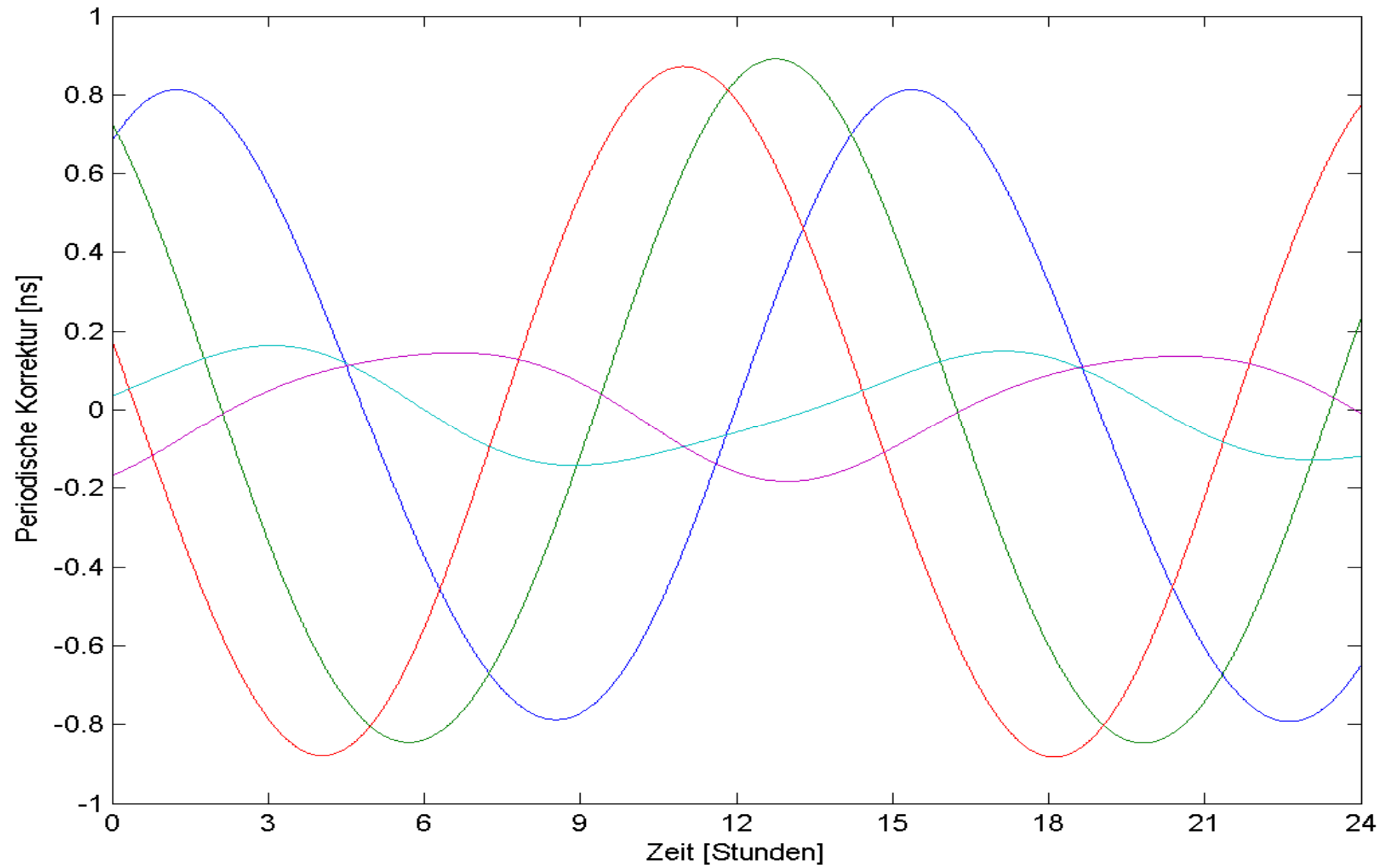
Satellitenuhr, periodische Korrektur

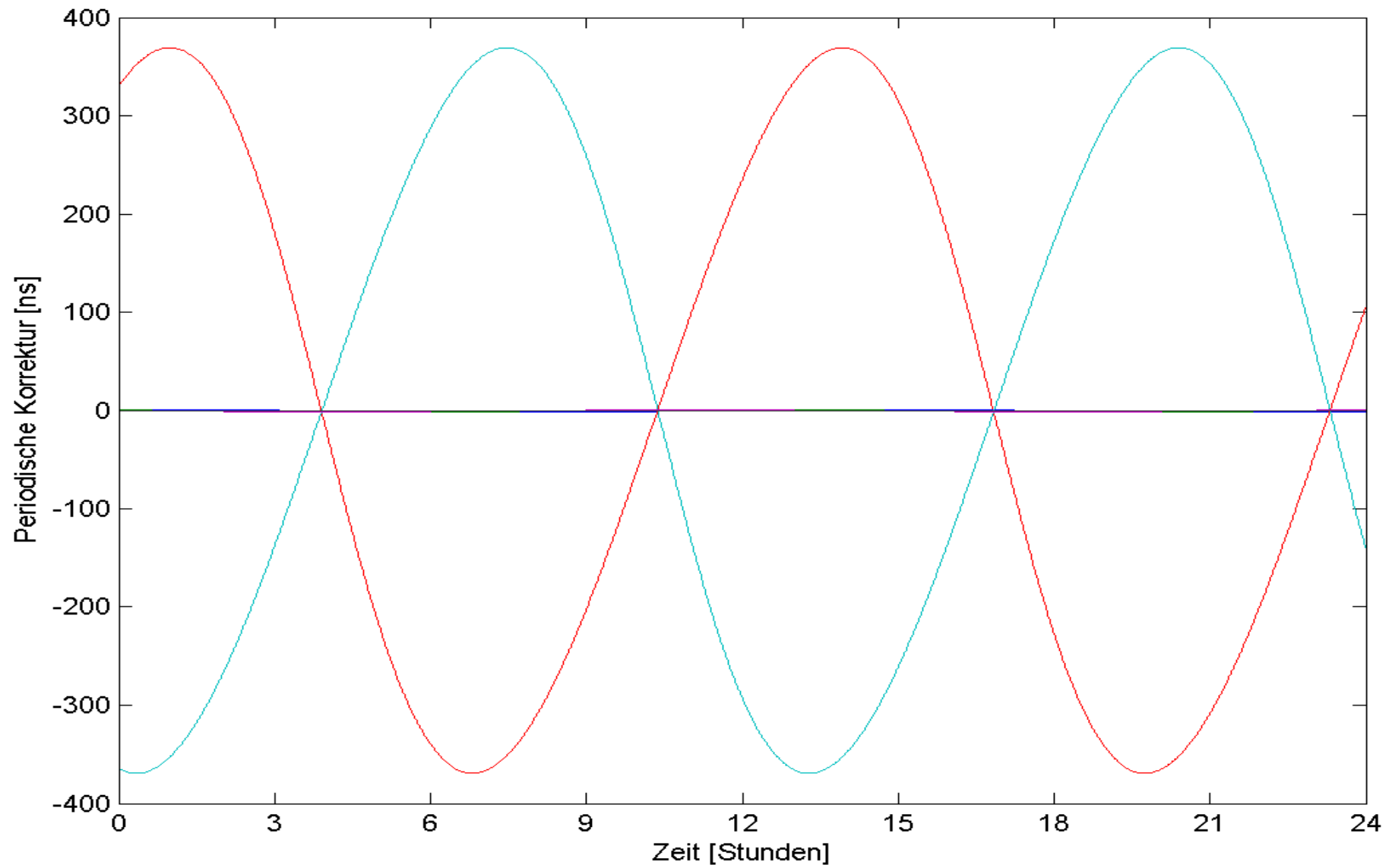
- Infolge Bahnexzentrizität
 - Variation der Geschwindigkeit
 - Variation der Höhe im Potential
- Beide Terme zusammen geben

$$\begin{aligned}\Delta t_{per} &= -2 \frac{\sqrt{GMa}}{c^2} e \sin E \\ &= -2 \frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}}{c^2}\end{aligned}$$

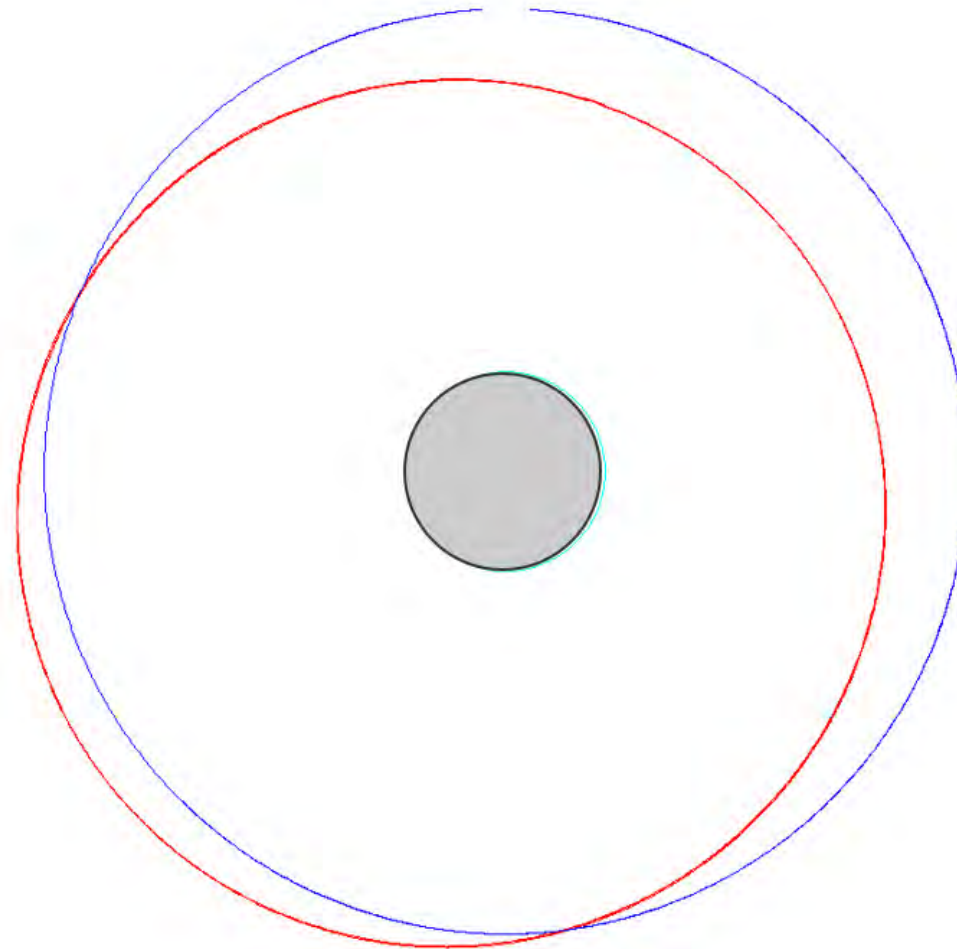
- Diese Formeln sind im Interface Control Document festgeschrieben, jeder Empfänger muss diese Korrektur anbringen.







Galileo Satelliten 5 und 6 auf der falschen Bahn



Galileo 1

$a = 29'600 \text{ km}$

$e = 0.00002$

$i = 55.4^\circ$

Galileo 5/6

$a = 27980 \text{ km}$

$e = 0.15725$

$i = 50.0^\circ$

Test der Gravitationsrotverschiebung

- Bester heutiger Test des Parameters α von Gravity Probe A 1976:

Unsicherheit: $1.4 \cdot 10^{-4}$

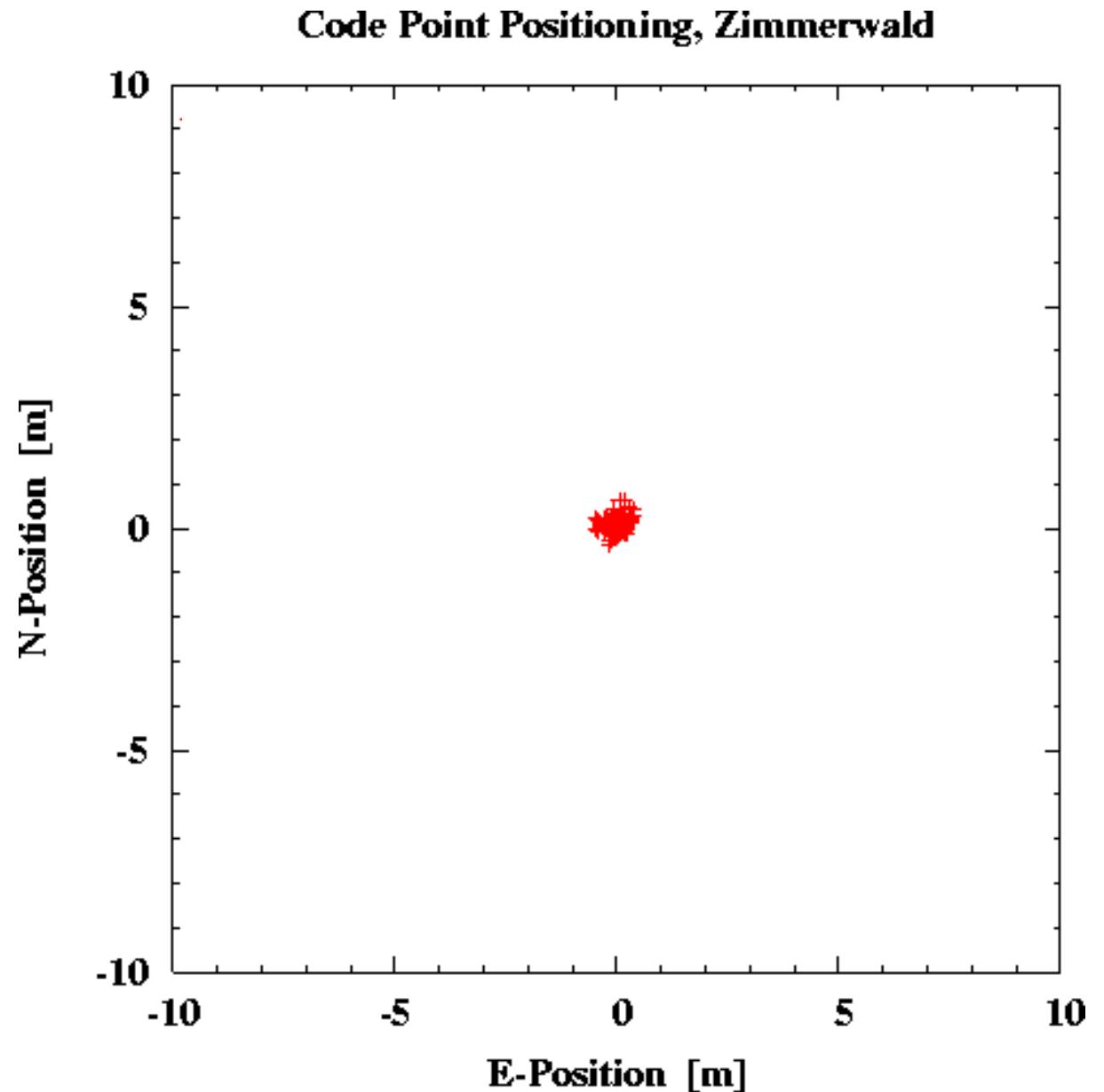
- Mit Galileo 5 und 6 aufgrund der Exzentrizität ihrer Bahn und der sehr stabilen Uhren an Bord:

Mögliche Verbesserung auf: $(3-4) \cdot 10^{-5}$

- Problem: Modellierung anderer Fehlerquellen, insbesondere Einfluss des Strahlungsdruckes auf die Satellitenbahnen.

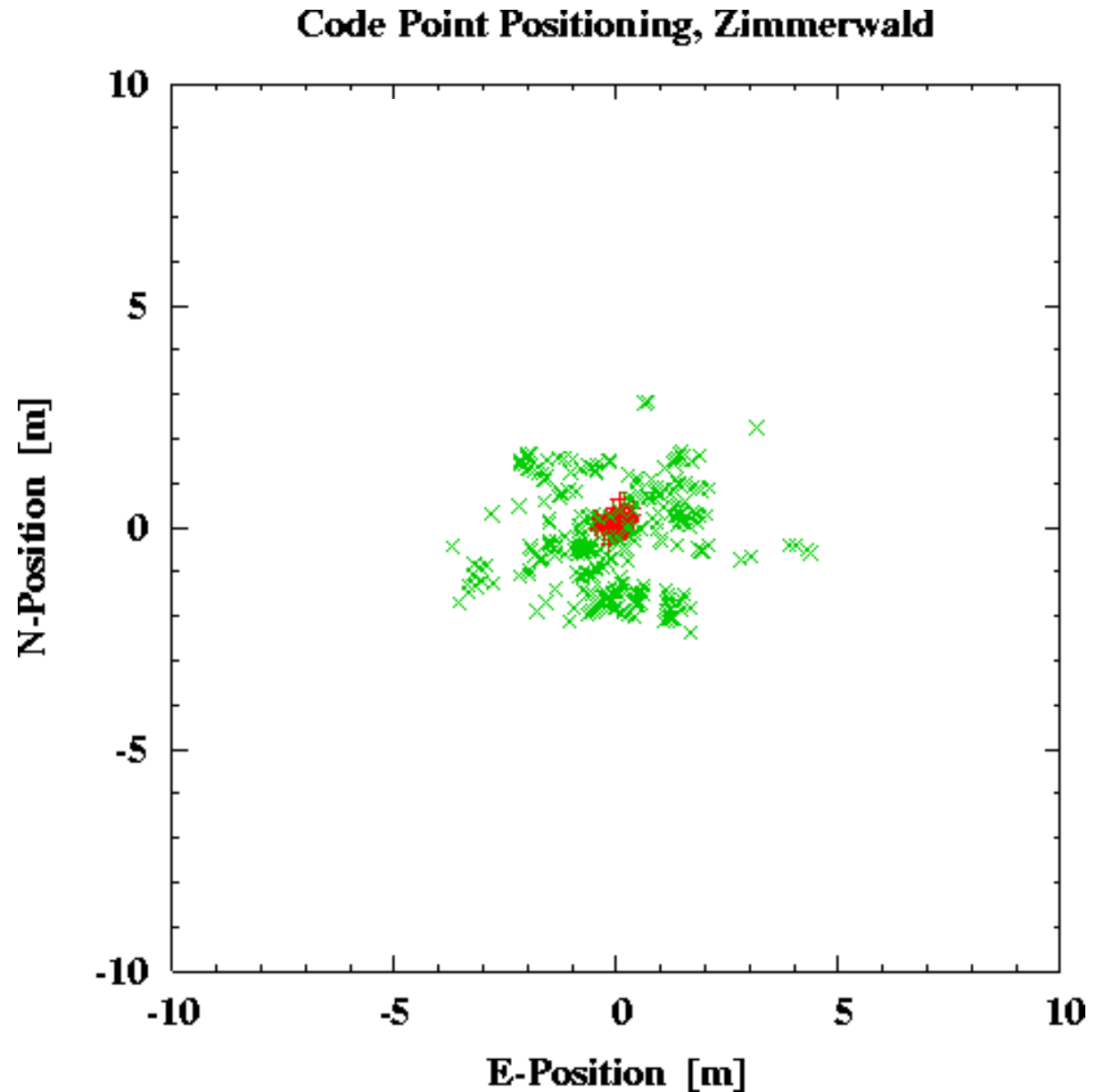
Positionierung

- Nutzung präziser Bahn- und Satellitenuhrinformation



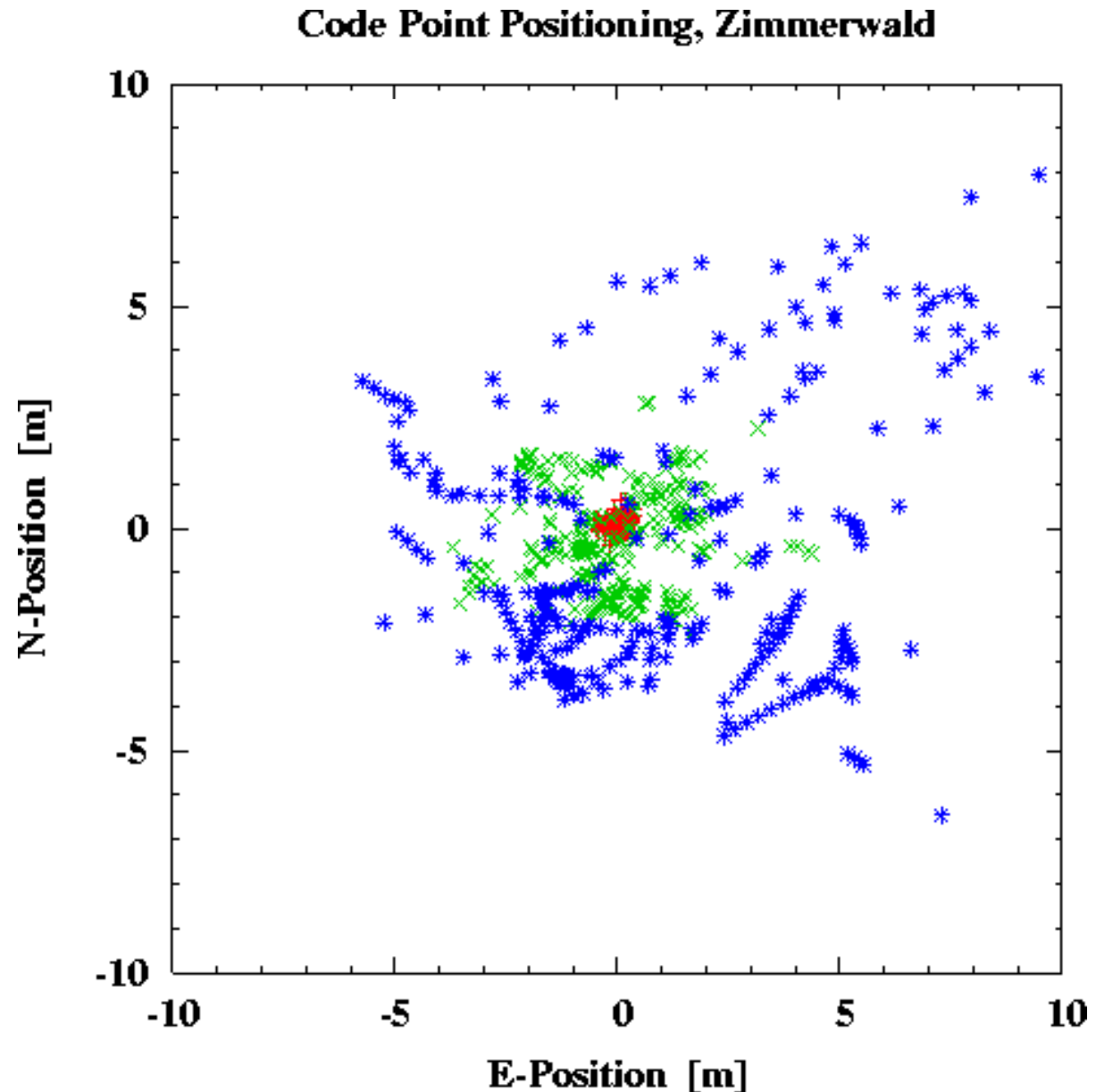
Positionierung

- Nutzung präziser Bahn- und Satellitenuhrinformation
- Nutzung der Bahn- und Satellitenuhrinformation, welche die Satelliten zur Verfügung stellen



Positionierung

- Nutzung präziser Bahn- und Satellitenuhrinformation
- Nutzung der Bahn- und Satellitenuhrinformation, welche die Satelliten zur Verfügung stellen
- Vernachlässigung der relativistischen periodischen Korrektur



Zweite Schlussfolgerung

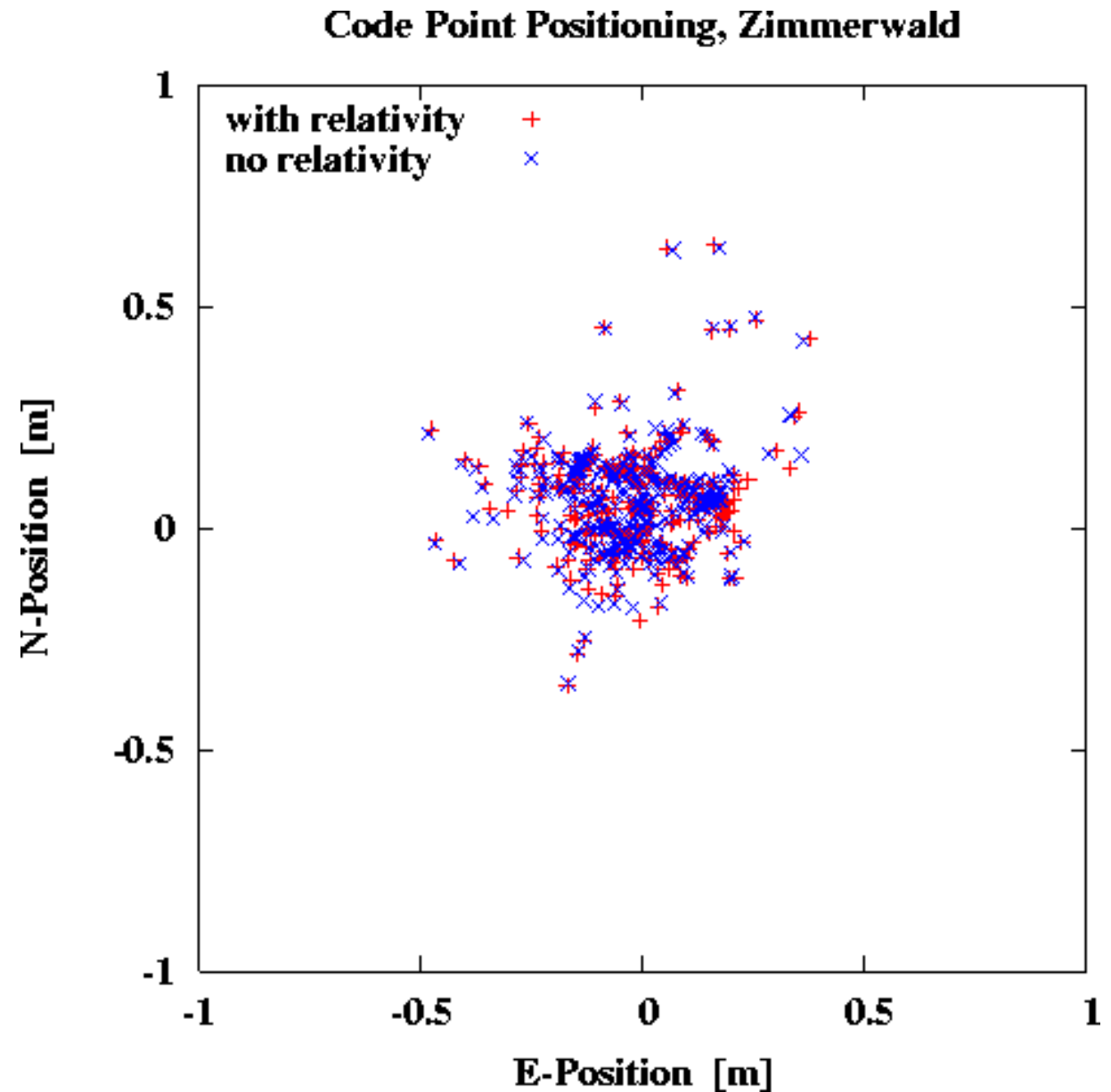
- Die durch relativistische Effekte in der Satellitenuhr erzeugte periodische Frequenzvariation muss von allen GNSS-Empfängern berechnet und korrigiert werden.
- Vernachlässigung dieser Variation hat bei GPS Positionsfehler von bis zu 10 m zur Folge.
- Wird die **relativistische periodische Korrektur**, nicht berücksichtigt, hätten wir ein funktionsfähiges, jedoch in seiner Qualität deutlich eingeschränktes Satellitennavigationssystem.

Konsistentes Experiment

- Konsequente Vernachlässigung aller relativistischer Effekte sowohl
 - bei der Bestimmung der Satellitenbahnen und -uhrkorrekturen, als auch
 - bei der Nutzung dieser Bahn- und Uhreninformation zur Positionierung

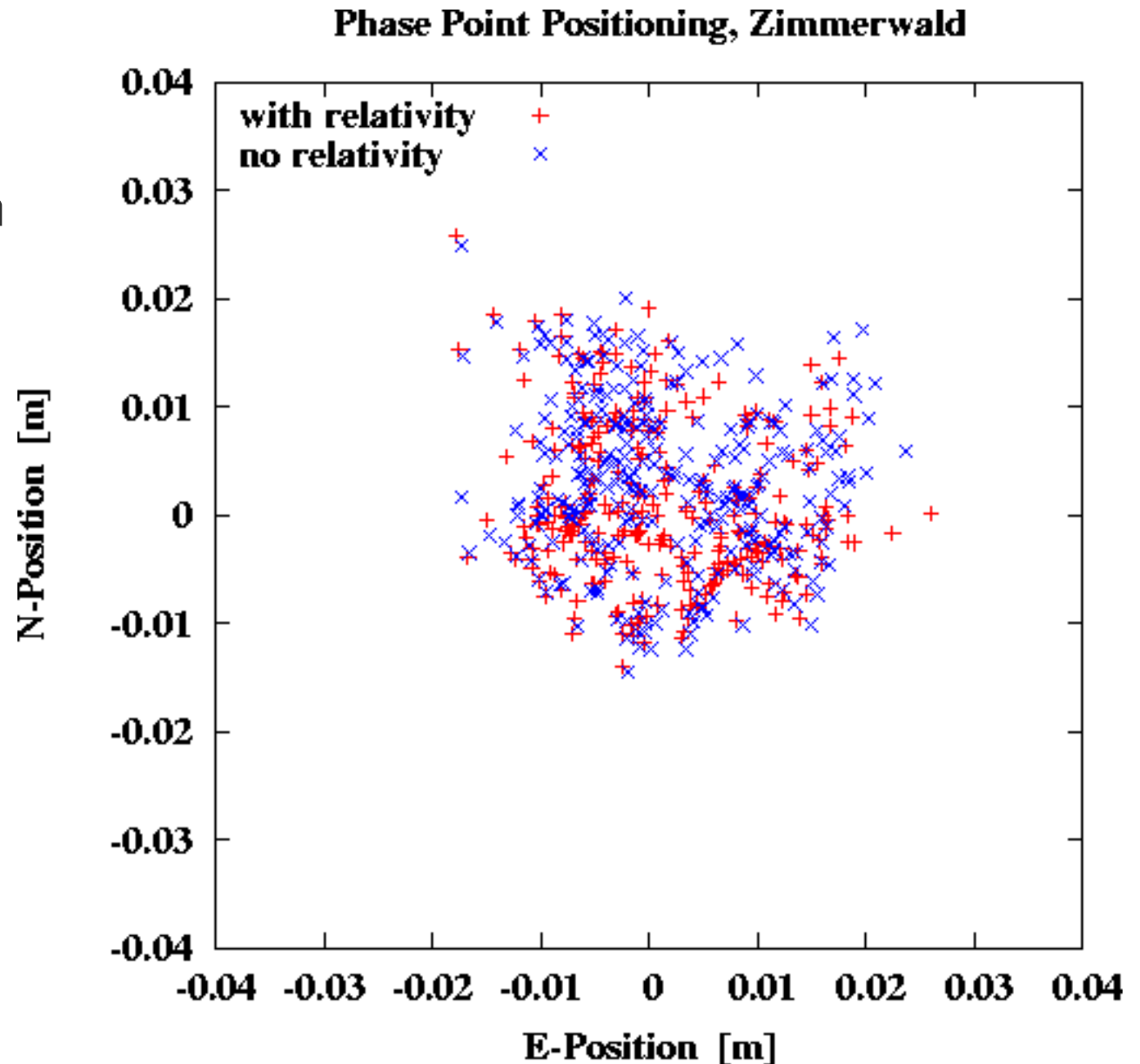
Positionierung

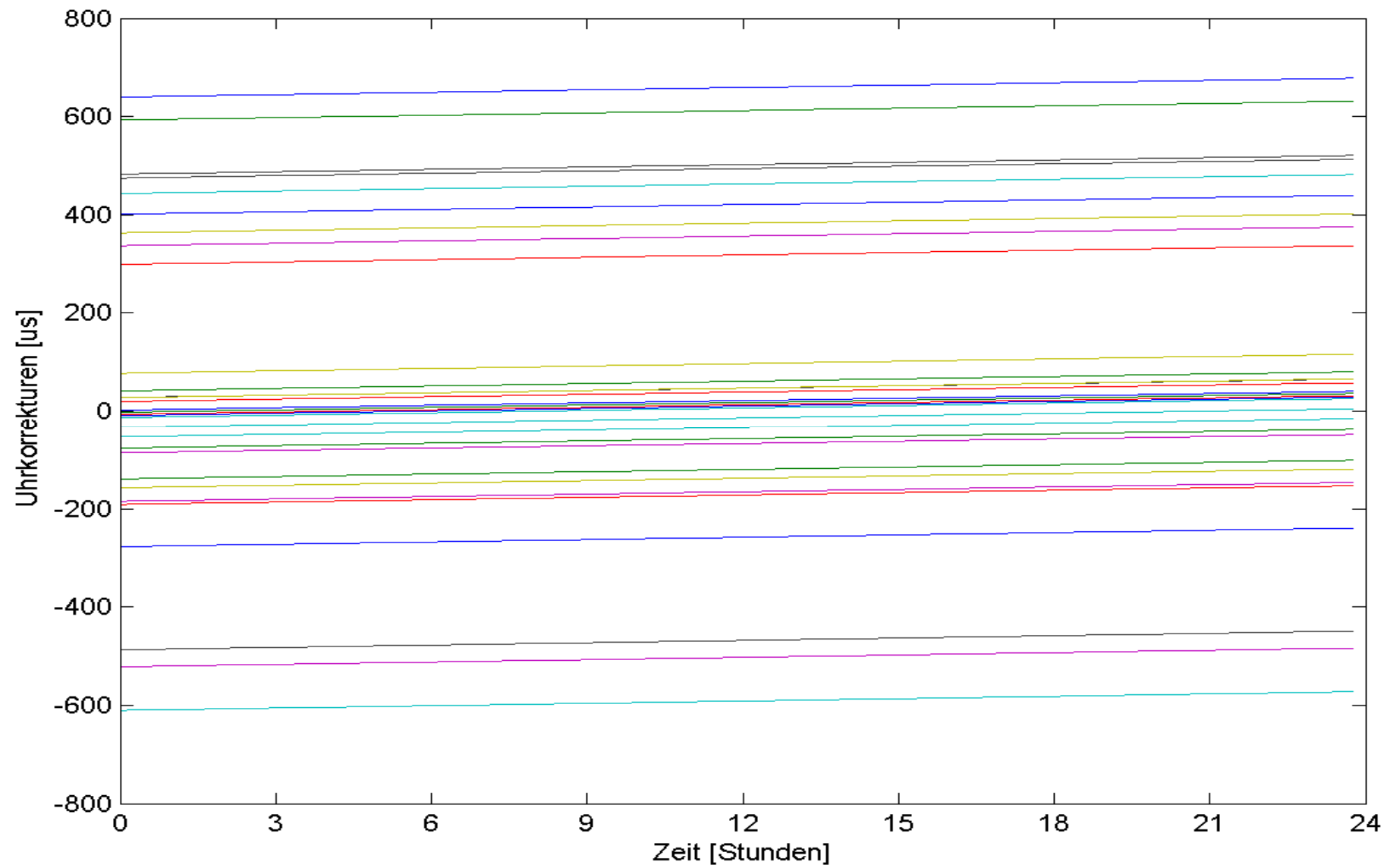
- Positionierung mit dem Meter-genauen Code zeigt keine signifikanten Differenzen

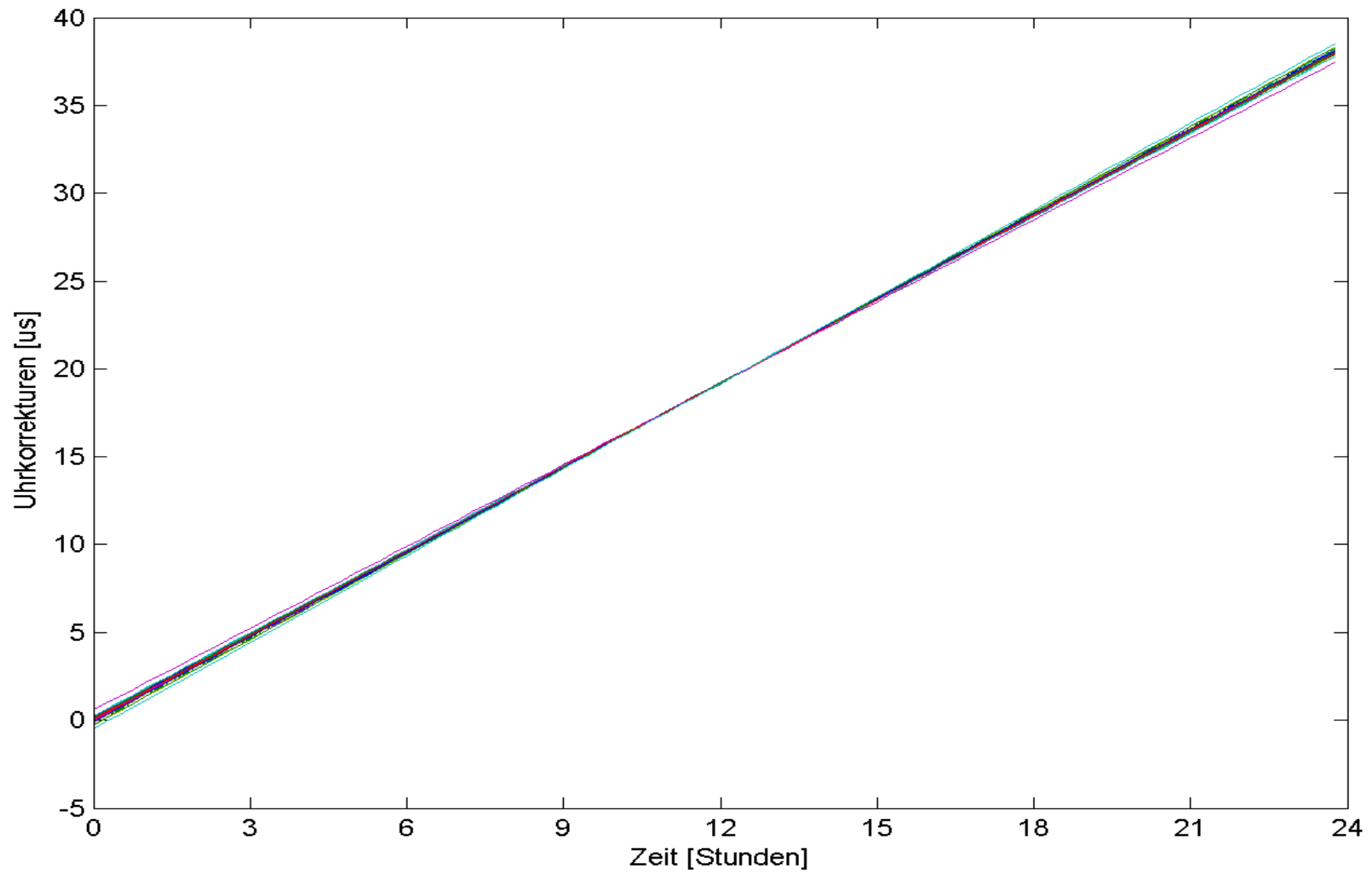


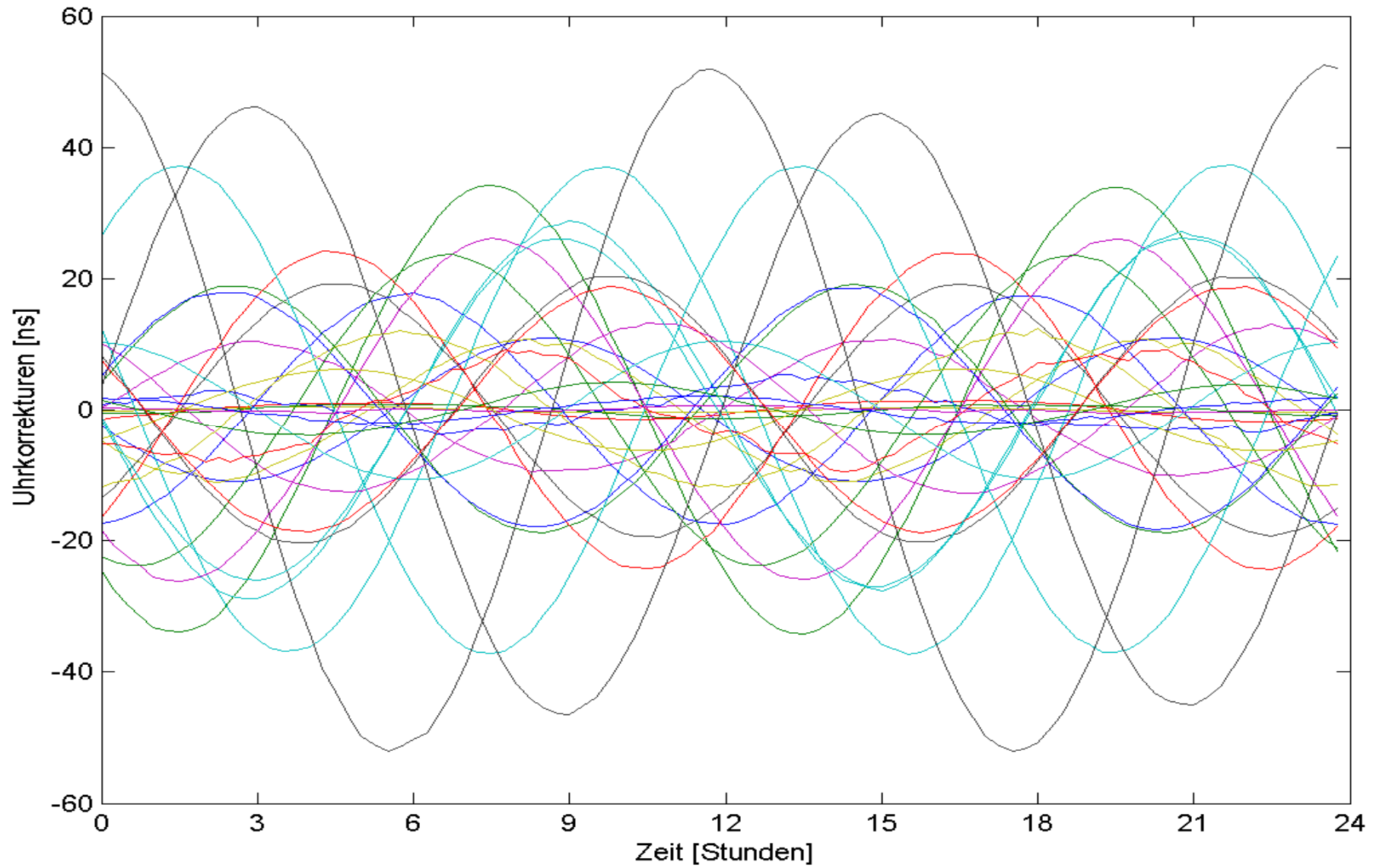
Positionierung

- Positionierung mit dem Meter-genauen Code zeigt keine signifikanten Differenzen
- Positionierung mit der Millimeter-genauen Phase zeigt auch keine signifikanten Differenzen

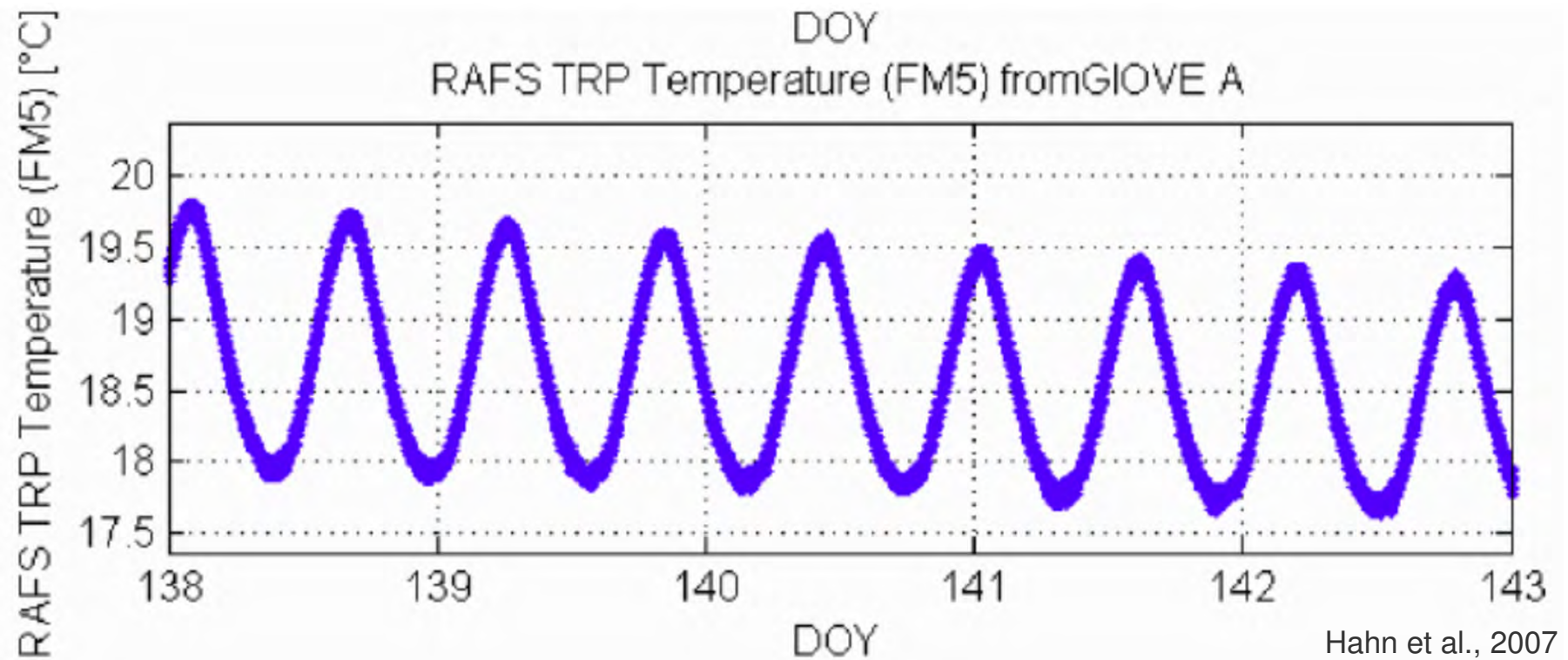




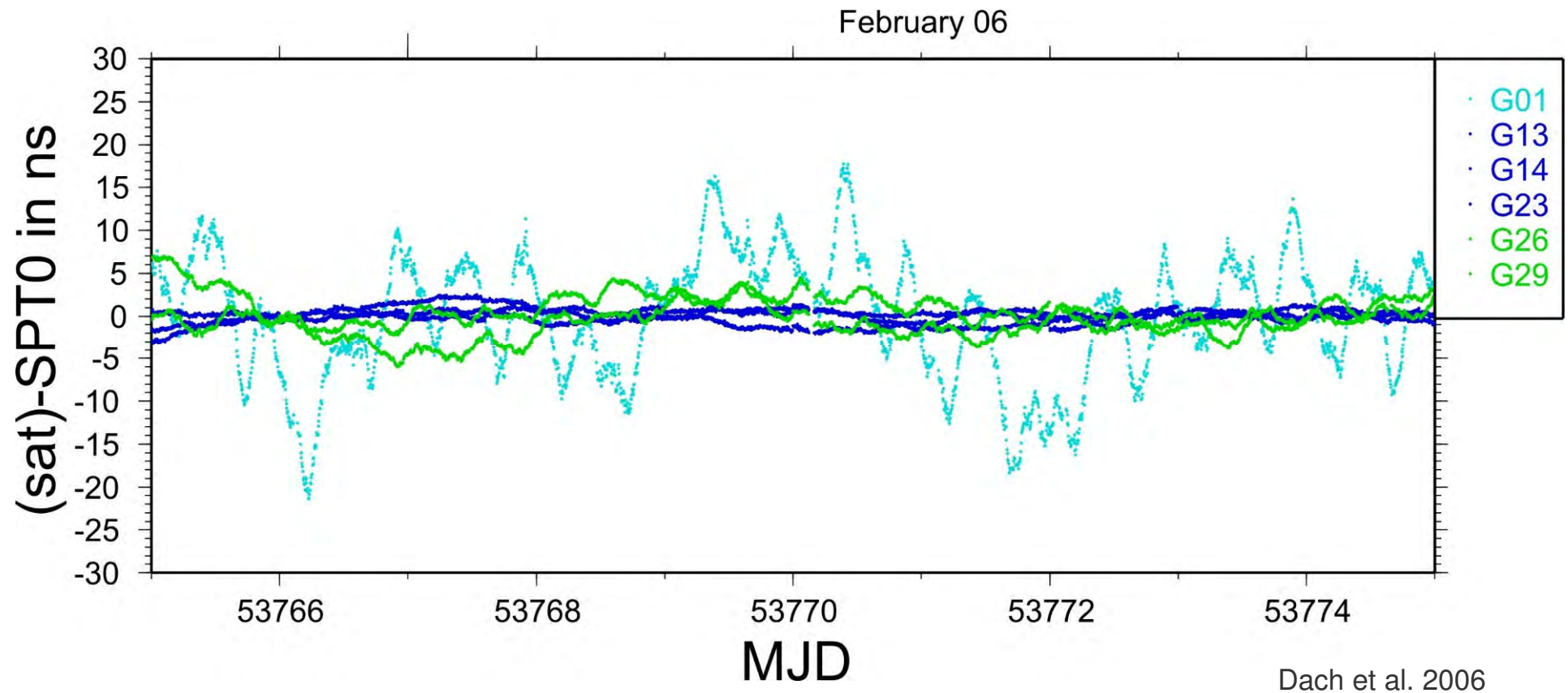


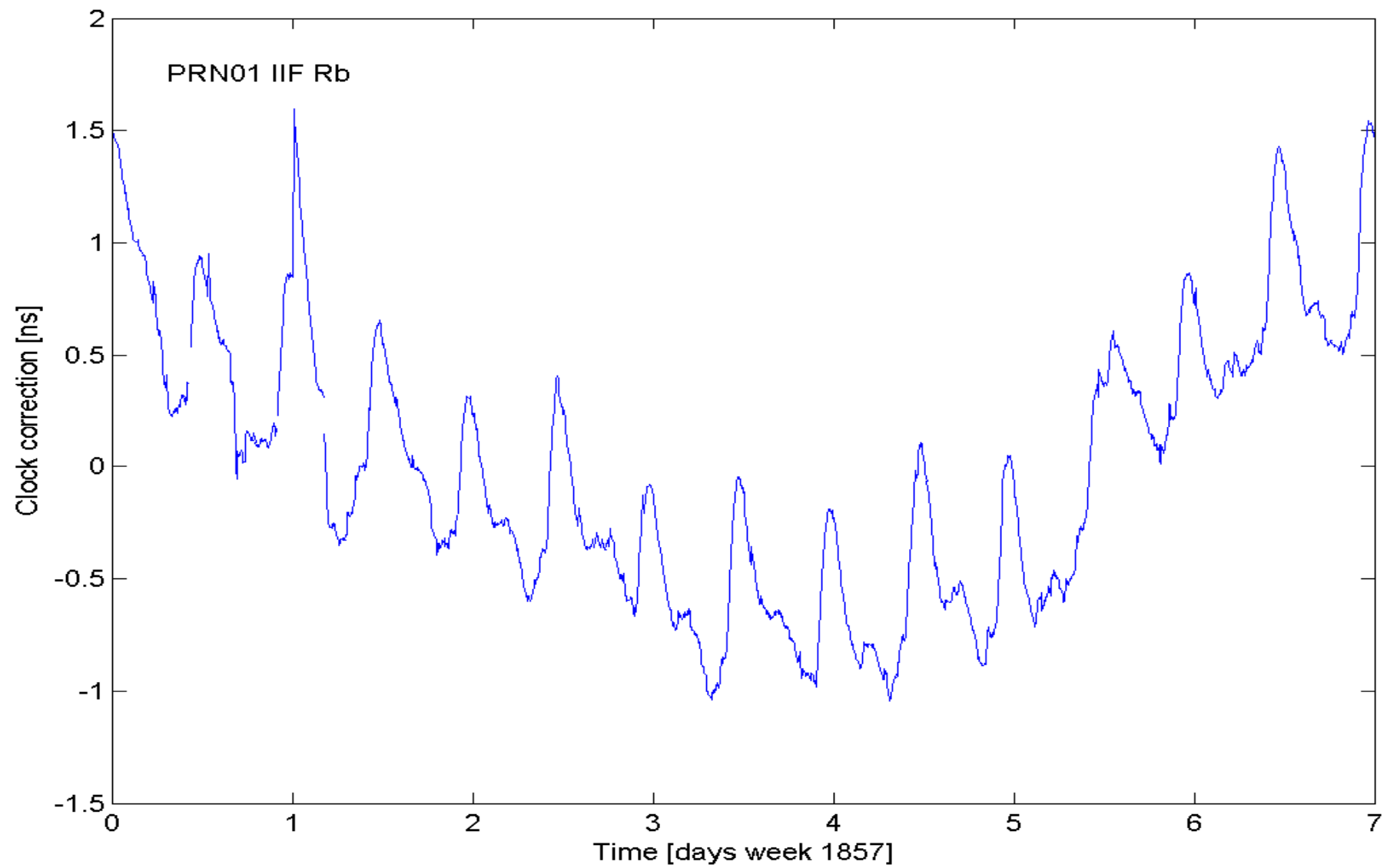


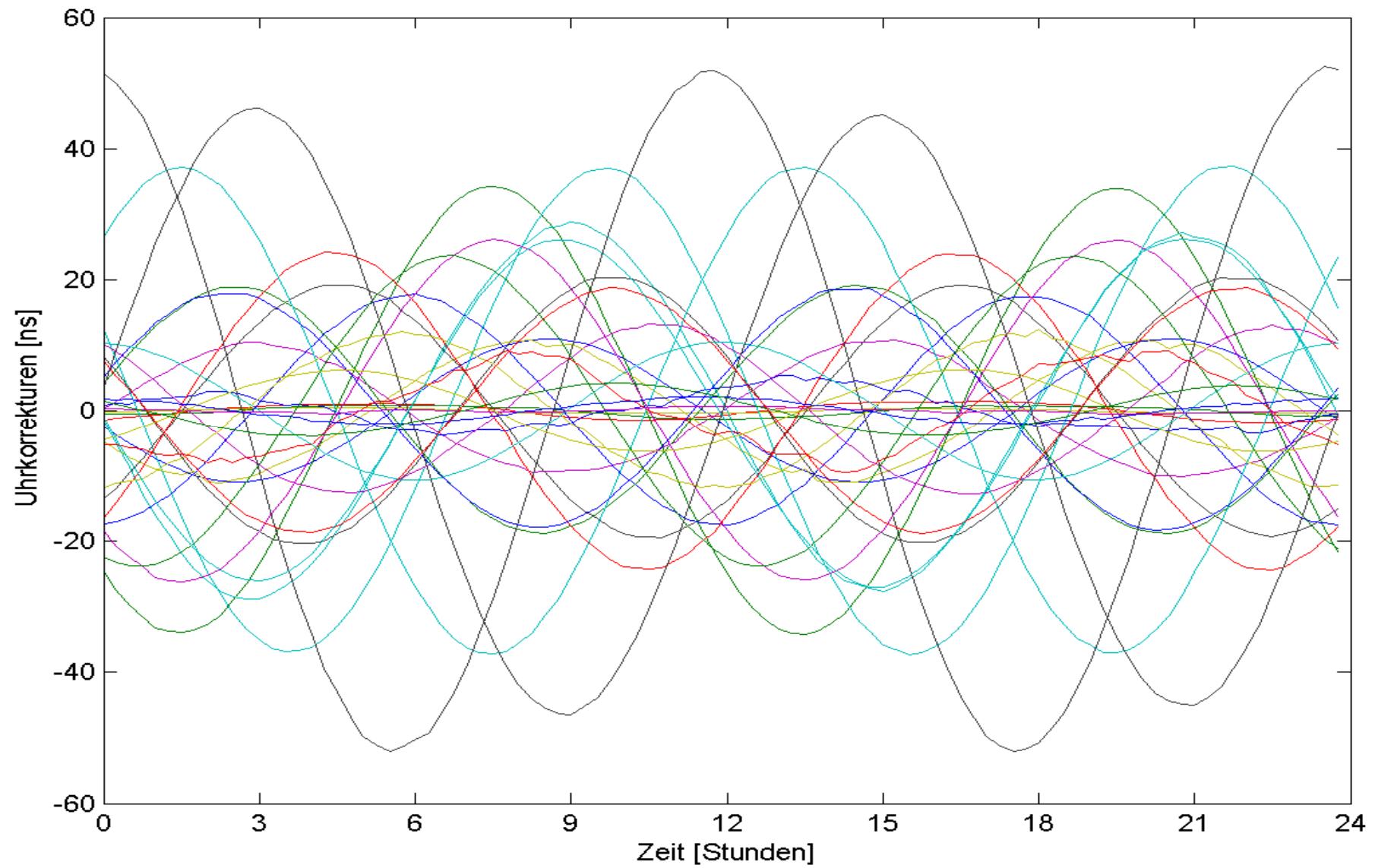
Temperaturvariationen im Galileo-Testsatelliten GIOVE-A

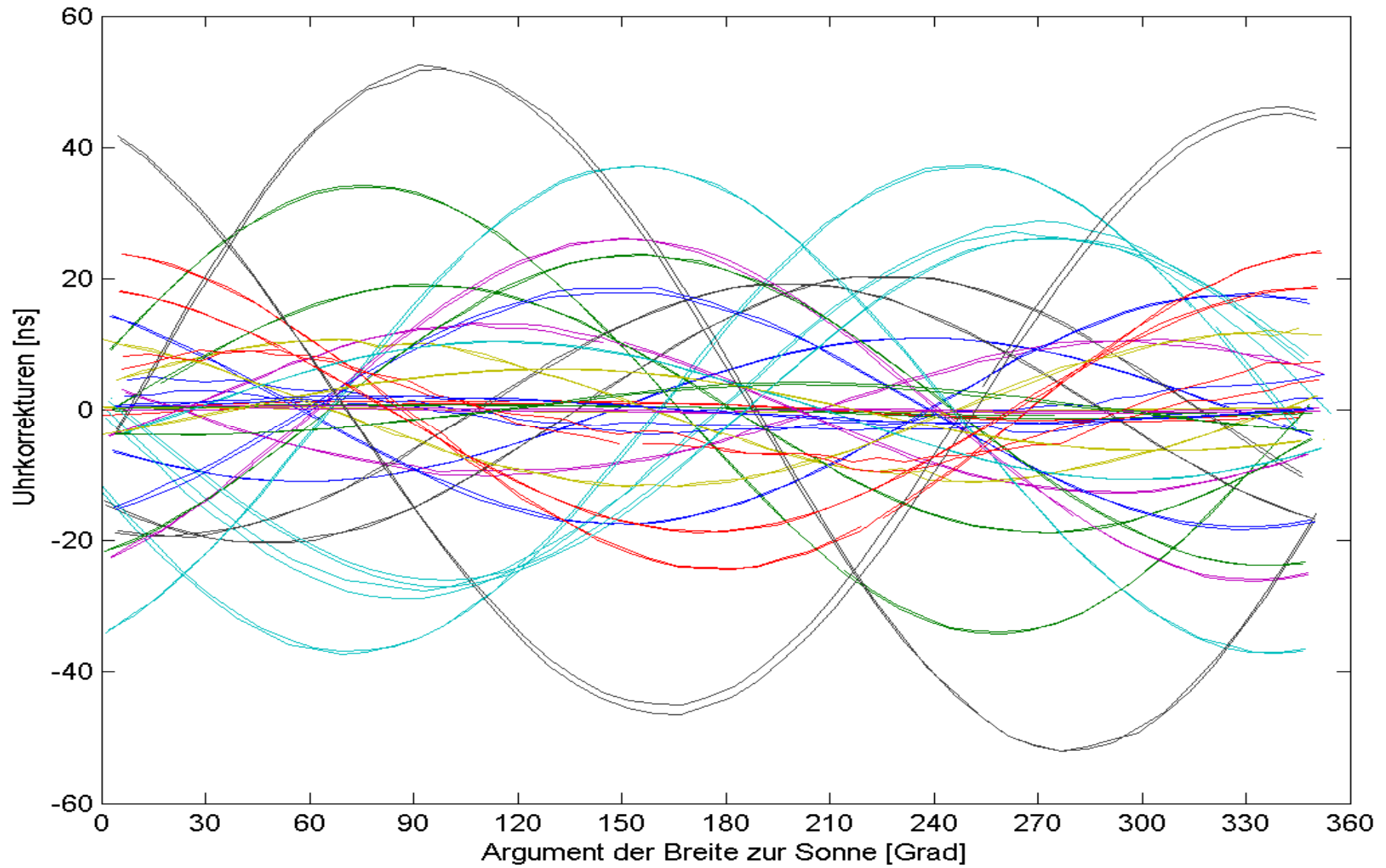


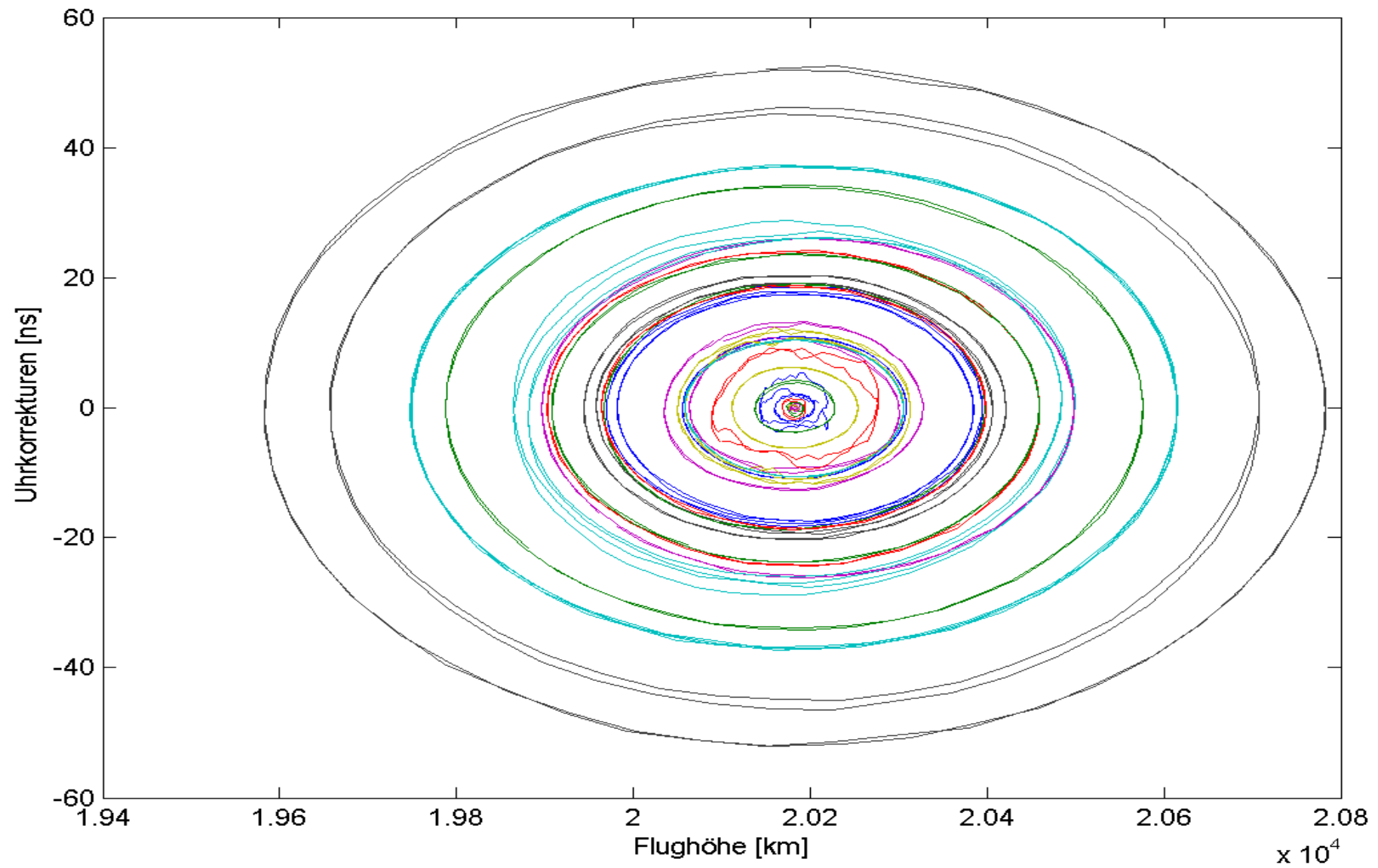
Variation der Uhren in älteren GPS-Satelliten

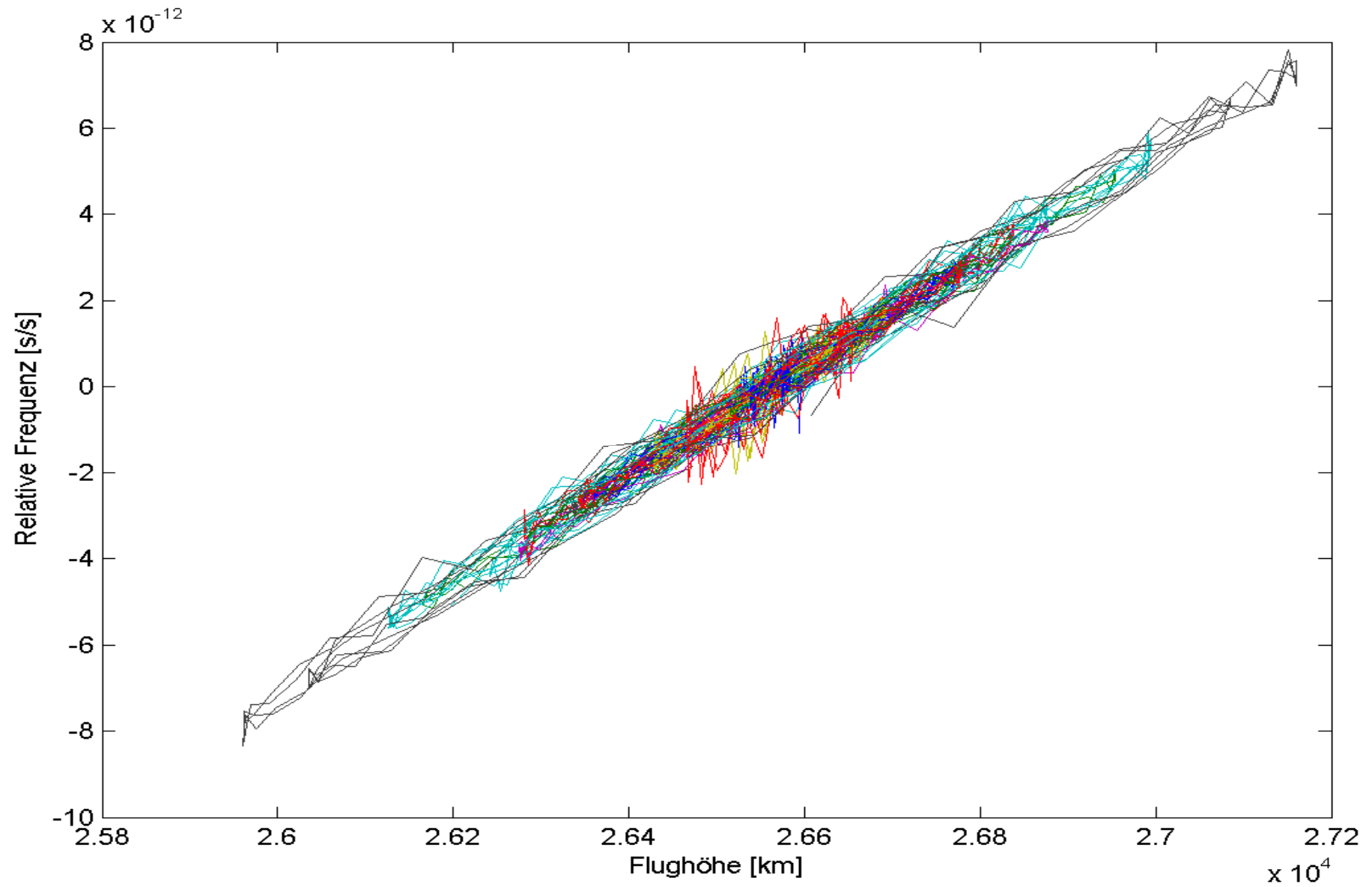


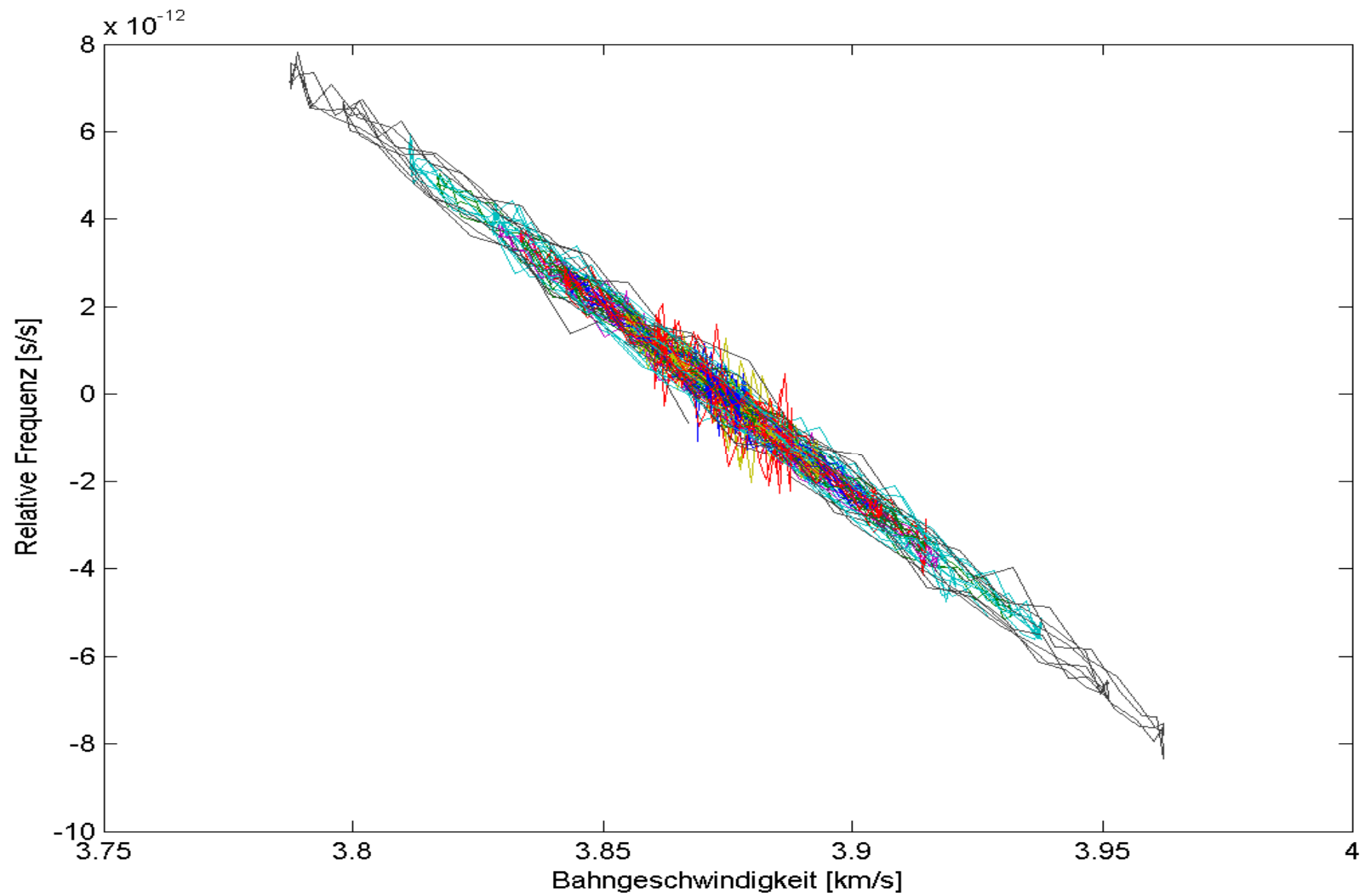


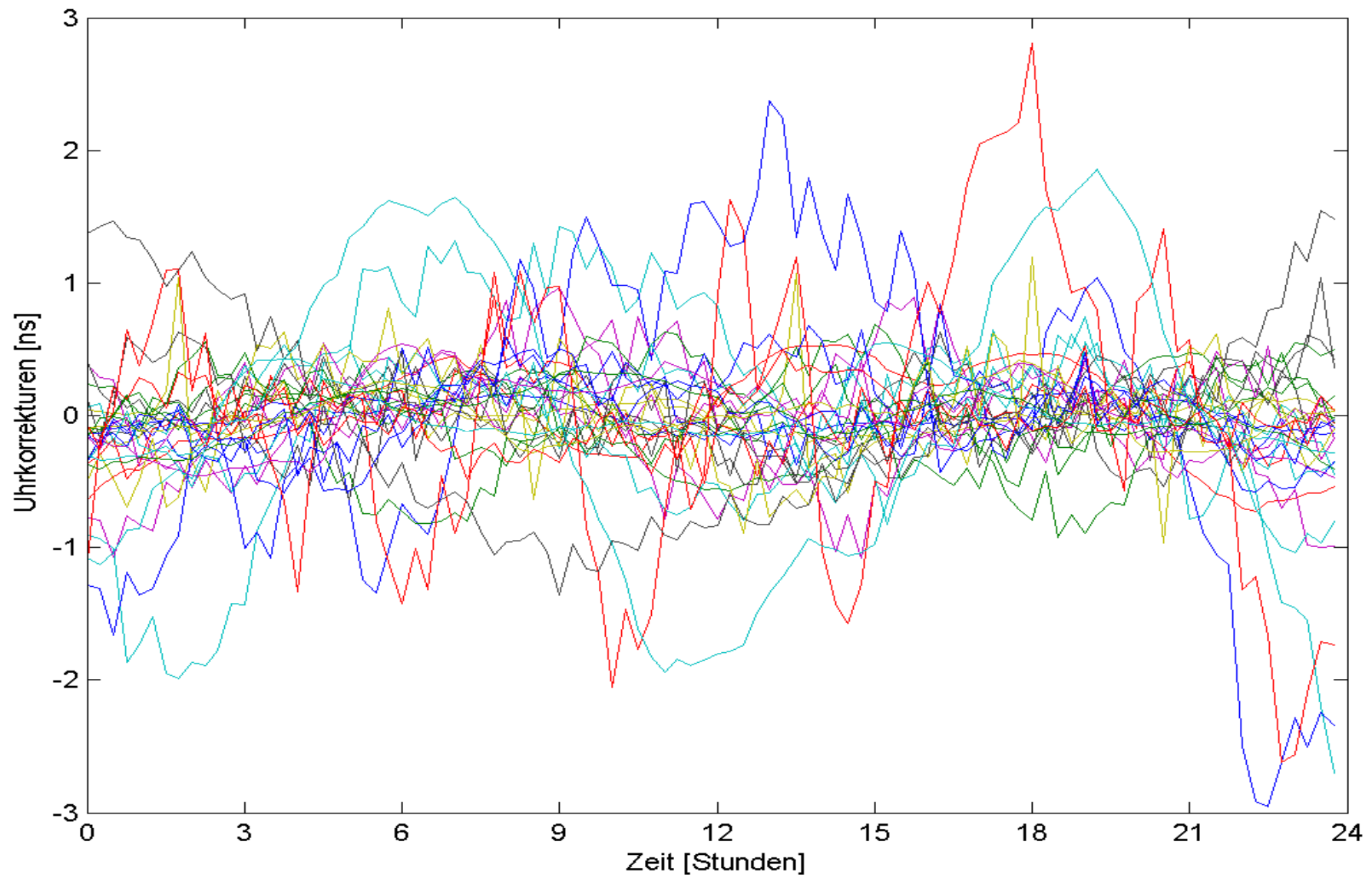








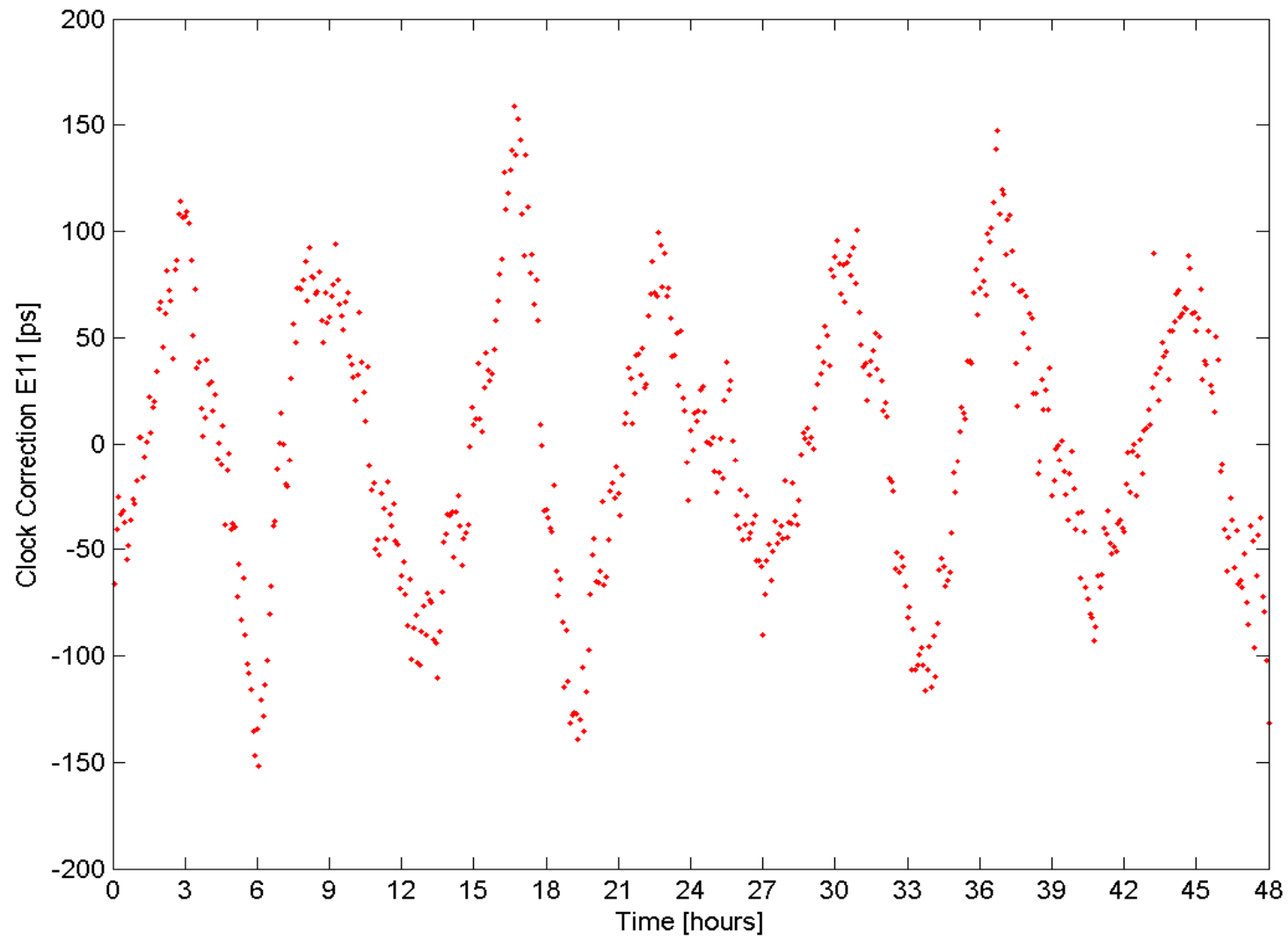




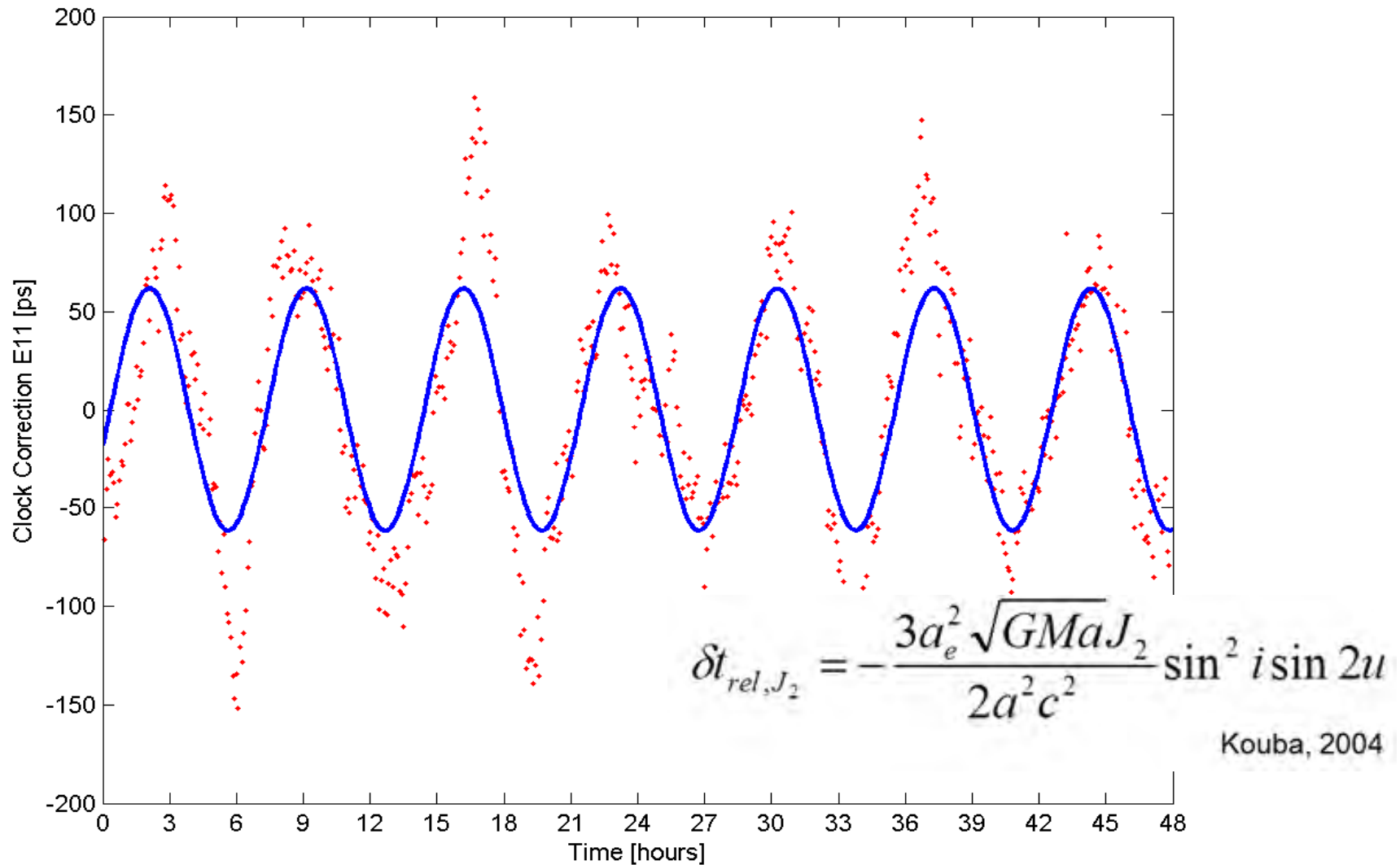
Dritte Schlussfolgerung

- Werden relativistische Korrekturen konsequent vernachlässigt, so erhält man trotzdem ein funktionierendes GNSS-System, welches hochpräzise Positionen liefern kann.
- Das Verhalten der Uhren wäre aber unverstanden.
- Es wäre daher **höchste Zeit**, dass die Relativitätstheorie gefunden würde.

Uhrkorrektur für Galileo 101

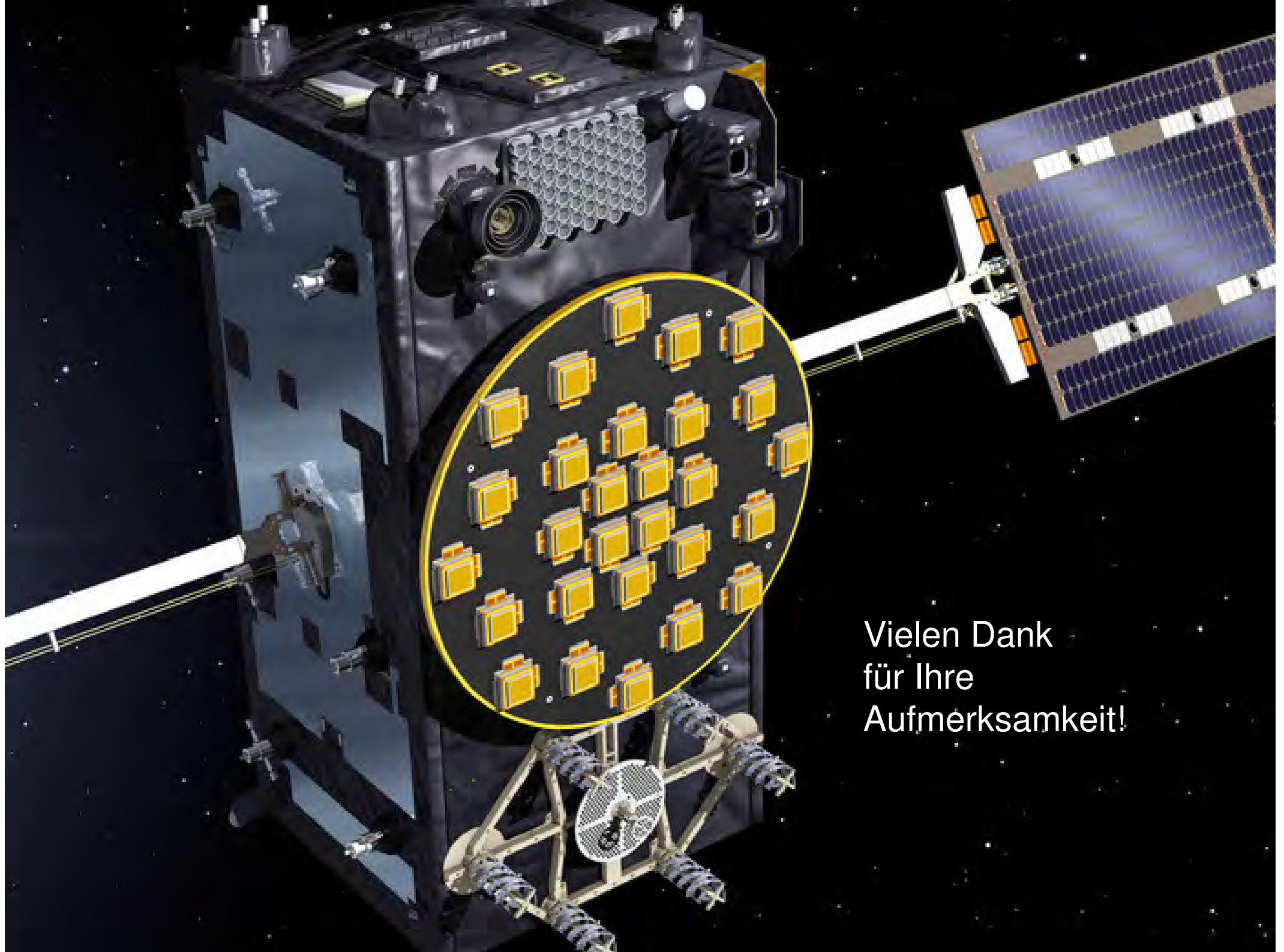


Relativistische Korrektur infolge Abplattung der Erde



Schlussfolgerung

- Uhren spielen in den geodätischen Messverfahren eine zentrale Rolle.
- GNSS würde auch funktionieren, wenn die Relativitätstheorie nicht berücksichtigt wird, da die Uhren kontinuierlich synchronisiert werden. Der Nutzer würde eine Verschlechterung der Navigationslösung feststellen.
- Uhren werden immer stabiler.
- Die kontinuierliche Synchronisation sollte durch Modelle der Uhren unterstützt. Dies verspricht eine weitere Erhöhung der Messgenauigkeit. Eine konsistente Nutzung der Relativitätstheorie ist dann unerlässlich.



Vielen Dank
für Ihre
Aufmerksamkeit!